

**INSTITUT INTERNATIONAL DES
ASSURANCES**

(IIA)



**INSTITUT DE SCIENCE
FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES**

(ISFA)



**CONSTRUCTION D'UNE TABLE DE MORTALITÉ
D'EXPÉRIENCE POUR LES ADHÉRENTS DE LA CRBC**

*Mémoire présenté et soutenu en vue de
l'obtention d'un Master
en Actuariat*

PAR

MOLO ZOGO Christian

SOUS L' ENCADREMENT DE :

Mr Josué Djoblona

*Actuaire
Gestionnaire CRBC (BEAC)*

Pr Louis Aimé Fono

*Professeur titulaire,
Université de Douala*



**BANQUE DES ETATS
D'AFRIQUE CENTRALE**

SEPTEMBRE 2021



Résumé

La table de mortalité est un instrument statistique fondamental dans toute modélisation en assurance vie. Dans ce mémoire, notre objectif était de faire l'étude de la mortalité des agents de la BEAC aboutissant à la construction d'une table de mortalité d'expérience donnant ainsi une meilleure estimation du risque réellement couvert par sa caisse de retraite complémentaire (La CRBC). A cet effet, un travail de prétraitement des données a été effectué afin de garantir de la qualité des données utilisées. Après cette étape fondamentale sur les données, nous avons procédé au calcul des taux bruts de mortalité à l'aide des estimateurs classiques de Hoem et Kaplan-Meier. Nous avons lissé ces taux bruts à l'aide du modèle de Brass, et nous avons terminé cette étape par la fermeture de la table de mortalité afin d'avoir une distribution théorique des taux bruts sur toutes les plages d'âge, grâce au modèle Coale & Kisker. En fin nous avons terminé l'étude par une analyse des impacts causés par la table de mortalité d'expérience sur les rentes, la tarification et le provisionnement passant aussi par l'analyse du taux de récupération de l'épargne.

Mots clés : table de mortalité, retraite complémentaire, Hoem, Kaplan-Meier, Brass, Coale & Kisker, taux de récupération de l'épargne.

Abstract

The life table is a fundamental statistical instrument in any life insurance modeling . In this thesis, our objective was to study mortality of BEAC's agents, from which we developed an experience life table, thus giving a better estimate of the risk actually covered by its Complementary Insurance Fund, (known by its French acronym as La CRBC). A preliminary work of data reprocessing was carried out in order to guarantee the quality of data used. After this fundamental step in data processing, we proceeded to the calculation of gross mortality rates using classical Hoem and Kaplan-Meier estimators, then we polished these gross rates using Brass's model. We ended this step by closing the mortality table in order to have a theoretical distribution of the gross rates over all the age ranges. This was done using the Coale & Kisker's model. Finally we ended the study with an analysis of the impacts of the experience mortality table on annuities, pricing and provisioning, and through the analysis of the savings recovery rate as well.

Keywords life table, Complementary pension, Hoem, Kaplan-Meier, Brass, Coale & Kisker, Savings recovery rate.

Dédicace à **Zogo Biloungou Isidore** "*L'éléphant*"

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué de prêt comme de loin à la réalisation de ce mémoire :

- Monsieur Urbain Philippe Adjanon Directeur Général de l'IIA (Yaoundé) et Monsieur Danfakha Dembo Directeur des études, qui ont œuvré pour la création de ce master.
- Monsieur Nicolas Leboisne Directeur de l'ISFA (Lyon) dont la collaboration fructueuse avec l'IIA a abouti à la création de ce master.
- Professeur Louis Aimé Fono (Enseignant IIA) et Monsieur Josué Djoblona (Gestionnaire CRBC), mes : directeur de mémoire et encadreur professionnel, pour leurs conseils et leurs disponibilités lesquels ont été décisifs dans la réalisation de ce mémoire.
- Dr Idriss Tchapda Djamen (CIB Finance BNP Paribas) et Dr Ngoupeyou Armand Brice (Directeur des opérations financières de la BEAC) dont les conseils et les orientations m'ont été d'une aide précieuse.
- L'ensemble du corps enseignant de l'IIA et de l'ISFA dont les enseignements ont été déterminants tout au long de cette formation.
- L'ensemble du corps administratif de l'IIA, pour leurs conseils et leurs présences chaleureuses au quotidien.
- Les amis et camarades durant cette formation sur *"la terre promise"*.
- Mes collègues enseignants du CES de Meyo-Ville pour leur soutien et surtout leur compréhension.
- En fin je remercie ma famille pour le soutien permanent qu'elle m'a apporté : ma mère , mes frères et sœurs et mon beau frère Mr Nkoulou Hubert.

Table des matières

Résumé	1
Abstract	3
Remerciements	5
INTRODUCTION	13
1 PRÉSENTATION ET ENJEUX DES SYSTÈMES DE RETRAITE	15
1.1 PRÉSENTATION DES SYSTEMES DE RETRAITE DANS LE MONDE	15
1.1.1 Historique	15
1.1.2 Quelques systèmes de retraite	16
1.1.3 Présentation des régimes de retraite de quelques pays	17
1.1.4 Prise en compte de la table de mortalité dans les caisses de retraite	19
1.2 SYSTÈMES DE RETRAITE DANS LA ZONE CIPRES	21
1.2.1 État de la sécurité sociale en Afrique	21
1.2.2 Présentation et objectifs de la CIPRES	22
1.2.3 Réalisation de la CIPRES	23
1.3 CAS PARTICULIER DE LA CRBC	24
1.3.1 Présentation et objectifs de la CRBC	24
1.3.2 Problématique de la caisse de retraite	26
2 DESCRIPTION ET ANALYSE DE LA BASE DE DONNÉES	27
2.1 DESCRIPTION DE LA BASE DE DONNÉES BRUTES	27
2.2 CONTRÔLES ET RETRAITEMENTS SUR LA BASE DE DONNÉES	30
2.3 ANALYSE STATISTIQUE DE LA BASE DE DONNÉES OBTENUE	32
2.3.1 Hétérogénéité	32

2	DESCRIPTION ET ANALYSE DE LA BASE DE DONNÉES	27
2.1	DESCRIPTION DE LA BASE DE DONNÉES BRUTES	27
2.2	CONTRÔLES ET RETRAITEMENTS SUR LA BASE DE DONNÉES	30
2.3	ANALYSE STATISTIQUE DE LA BASE DE DONNÉES OBTENUE	32
2.3.1	Hétérogénéité	32
2.3.2	Mortalité	34
2.3.3	Expositions	38
3	CONSTRUCTION DE LA TABLE DE MORTALITÉ D'EXPÉRIENCE ET ANALYSE DES IMPACTS	41
3.1	VALIDATION DES DONNÉES ET DÉTERMINATION DE LA PLAGE D'ÂGES OPTIMALE	41
3.1.1	Le critère de Cochran	41
3.1.2	La fenêtre d'observation et notion de censure	43
3.2	ESTIMATION DES TAUX BRUTS DE MORTALITÉ	44
3.2.1	Estimation par la méthode de Hoem	44
3.2.2	Estimation par la Méthode de Kaplan-Meier	46
3.3	LISSAGE DE LA TABLE DE MORTALITÉ	48
3.4	FERMETURE DE LA TABLE	50
3.4.1	Fermeture à droite	50
3.4.2	Fermeture à gauche	52
3.4.3	Table de mortalité d'expérience obtenue	53
3.5	ANALYSE DES IMPACTS QUE CAUSERAIT LA NOUVELLE TABLE DE MORTALITÉ	54
3.5.1	Analyse du taux de récupération de l'épargne	54
3.5.2	Analyse des impacts sur la rente	56
3.5.3	Analyse des impacts sur les provisions mathématiques	57
3.5.4	Généralisation de l'étude	58
3.5.5	Approche prospective	60
	CONCLUSION	63
	Bibliographie	65
	Bibliographie	65

Table des figures

1.1	Pays où il fait bon vivre après 65 ans	20
2.1	Répartition des agents de la BEAC par pays	33
2.2	Boîte à moustache des âges au décès des retraités	35
2.3	Répartition des âges au décès (sauts de 5 ans)	36
2.4	Répartition des âges au décès (sauts d'un an)	37
2.5	Évolution de la mortalité entre 2008 et 2018	37
2.6	Courbe de densité des décès	38
2.7	Répartition des expositions par âge	39
3.1	Application du critère de Cochran sur les données	42
3.2	Répartition des décès dans la base obtenue après restriction à la période d'observation	43
3.3	Taux bruts de Hoem de 33 à 80 ans	45
3.4	Taux bruts Hoem et Kaplan-Meier	47
3.5	Régression sur les logits	49
3.6	Taux lissés, taux bruts et taux CIMA F	49
3.7	Fermeture à droite	51
3.8	Fermeture à gauche	52
3.9	Table d'expérience et table de référence	53
3.10	Facteurs d'escompte calculés à partir des deux table de mortalité . .	59
3.11	Différence entre les facteurs d'escompte issus des deux tables de mortalité	60
3.12	Décès observés au cours de l'année 1999 par âge	61
3.13	Décès observés au cours de l'année 2005 par âge	62
3.14	Décès observés au cours de l'année 2015 par âge	63

Liste des tableaux

2.1	Description des variables de la base	28
2.2	Détail sur la variable " <i>Statut CRBC</i> "	29
2.3	Espérances de vie des pays de la CEMAC (Site internet de l'OMS) .	33

INTRODUCTION

La médecine et le niveau de vie ayant évolués ces dernières années, il s'en est suivi une augmentation de l'espérance de vie à l'échelle mondiale. Bien que cette augmentation de l'espérance de vie soit plus prononcée dans les pays occidentaux, celle observée en Afrique n'en est pas moins significative. Ainsi pour les assureurs vie et les caisses de retraite, il existe un risque que la mortalité prise en compte dans les tarifs soit caduque ou qu'elle soit issue de étude sur une population globale par rapport à la population réellement couverte, car en effet la réglementation CIMA en son article 338 préconise l'utilisation de la table CIMA F pour tarifier les contrats en cas de vie et la table CIMA H pour les contrats en cas de décès lesquels ont été obtenues après une étude sur une population beaucoup plus globale que celle qui constitue les portefeuilles des assureurs et des caisses de retraite pris individuellement.

La CRBC (Caisse de Retraite de la Banque Centrale) est le régime de retraite complémentaire des agents de la BEAC, Créée en 1999 en remplacement du régime de retraite de 1957. Il s'agit d'un régime de retraite servant à ses adhérents une rente viagère dès l'âge de 60 ans, fonctionnant par point et selon un mécanisme de capitalisation. Les probabilités viagères étant estimées à partir de la table CIMA F, il se pose alors le problème qui est celui de l'utilisation d'une table règlementaire donc issue d'une population globale afin d'évaluer le risque viager sur une population spécifique (les adhérents de la CRBC). C'est ainsi qu'à la demande des adhérents de la CRBC et de ses organes d'administration, est initiée une étude sur la mortalité réelle observée sur les adhérents de la CRBC afin d'aboutir à une table de mortalité d'expérience et d'en étudier les impacts éventuels sur les paramètres techniques de la caisse de retraite.

Nous commencerons par une analyse descriptive de la base de données ainsi que des retraitements afin d'avoir des informations cohérentes représentatives sur les adhérents de la CRBC, ensuite nous étudierons la mortalité dans ce portefeuille à l'aide de modèle appropriés et enfin nous ferons une synthèse des résultats obtenus.

Chapitre 1

PRÉSENTATION ET ENJEUX DES SYSTÈMES DE RETRAITE

«Les trois grandes époques de l'humanité sont l'âge de la pierre, l'âge du bronze et l'âge de la retraite.» (Jean-Charles)

1.1 PRÉSENTATION DES SYSTEMES DE RETRAITE DANS LE MONDE

1.1.1 Historique

Le mot retraite désigne l'action de se retirer. Selon le contexte, au sens économique et social, la retraite est l'époque dans la vie d'un humain, où il se retire de la vie active.

Les premiers systèmes de retraite sont connus dès l'Antiquité. En raison de professionnalisation de l'armée pendant la République les vétérans de l'armée romaine en bénéficient [4]. Sous l'Empire ils perçoivent une prime de démobilisation d'un montant équivalent à une dizaine d'années de soldes.

Sous Auguste, l'Empire romain ne parvient plus à payer les retraites de ses légionnaires. Le consul Caius Marius en 23 av. J.-C. propose à Auguste de faire passer de 16 à 20 ans le nombre d'années de service militaire obligatoire. L'empereur crée en plus le Trésor militaire (*Ærarium militare*), caisse de retraite des légionnaires approvisionnée par une taxe de 5% sur les héritages et de 1% sur toutes les ventes.

Au Moyen Âge, dans les abbayes bénédictines, les serviteurs laïques de certaines abbayes percevaient des pensions (en argent ou en nature) lorsque l'âge ne leur permettait plus d'exercer leur charge. Parfois même les veuves pouvaient conti-

nuer à percevoir ces pensions. Quelques catégories sociales (religieux, militaires, artisans) bénéficiaient d'une caisse de retraite alimentée par leur confrérie².

Le versement d'une retraite prend son essor en Europe au xix^e siècle, en réponse de Bismarck à l'agitation sociale. Elle se généralise au xx^e siècle avec l'allongement de l'espérance de vie.[4]

Nous présentons dans la sous-section suivante quelques caractéristiques propres aux systèmes de retraite rencontrés dans la pratique. Ces différents systèmes de retraite font intervenir des contraintes réglementaires et des décisions personnelles des individus en fonction de leurs préférences.

1.1.2 Quelques systèmes de retraite

L'avenir des personnes en activité dépend souvent des caisses de retraite (de base et complémentaire) différentes par leurs configurations et leurs spécificités, nous abordons ici quelques une de ces caractéristiques des caisses de retraite. **Prestations définies ou cotisations définies**

Dans un régime à cotisations définies, des règles fixent les montants de cotisation ; ça peut être un simple pourcentage du revenu, ou un montant librement fixé par le cotisant ; des seuils, des plafonds, des bonus. Le montant des pensions versées n'est pas a priori connu, et n'est donc pas garanti : il sera constaté au moment de leur paiement, en fonction du rendement constaté des cotisations, du nombre de pensionnés, de leur durée de vie réelle ou prévisionnelle, etc. Pour le calcul des pensions à verser, on se base sur ce que le futur pensionné a accumulé comme droits, en points de retraite ou en devise sur un compte notionnel.[4]

Un régime à prestations définies vise un montant de pension, et ajuste les versements réclamés aux cotisants en fonction de cet objectif. C'est le cotisant qui supporte l'essentiel des risques. Le risque pour les pensionnés ne disparaît pas pour autant, mais il change de nature : si le gestionnaire a pris des engagements qui s'avèrent irréalistes, il peut faire faillite, au risque (pour les retraités) de voir la pension disparaître purement et simplement (ou, au mieux, de se voir imposer une réduction des pensions).[4]

Le système de retraite par répartition

Dans ce système les travailleurs actuels financent par leurs cotisations les pensions versées aux retraités du moment, leurs propres pensions seront payées par les travailleurs futurs. Ce système est nécessairement obligatoire et public. Ce système repose donc sur une forte solidarité entre générations. Son équilibre financier dépend du rapport entre le nombre de cotisants et celui des retraités. Les taux de croissance des revenus et de la population active occupée constituent dès lors les deux principaux facteurs d'évolution.

Le système de retraite par capitalisation

Les travailleurs actuels épargnent pour leur propre retraite et les pensions sont servies aux retraités à proportion du capital accumulé pour eux à cet effet. Le système s'apparente à une forme d'assurance-vie ; il peut être totalement libre ou (partiellement) obligatoire. Les sommes en jeu sont considérables, elles se retrouvent en bourse (capital des grandes entreprises cotées), dans le financement des emprunts d'État et autres obligations, et elles conditionnent les pensions de beaucoup de gens (avec des répercussions sociales lourdes en cas de problème). De ce fait le marché et ses intervenants sont toujours contrôlés par les autorités.

1.1.3 Présentation des régimes de retraite de quelques pays

Nous verrons dans cette sous-section que les systèmes en vigueur sont très variés, avec une combinaison en part variable de solidarité nationale (assurant une pension minimale) financée par l'impôt, de répartition, et de capitalisation.

Aux États-Unis

Aux États-Unis, le système des retraites par répartition, qui fait partie de la sécurité sociale (en anglais Social Security), a été fondé pendant le New Deal des années 1930 sous la présidence de Franklin Roosevelt. La Grande Dépression qui commença en 1929 mit en difficulté la retraite par capitalisation. Le système de retraites a été créé dans le but de protéger les personnes âgées contre la misère. En 2005, ce système fournit plus de la moitié de leurs revenus aux deux tiers des retraités du pays. Au début de son second mandat, le président Bush a souhaité mettre en place une semi-privatisation, ce qui a provoqué l'opposition de l'AARP¹, organisation représentant 35 millions de retraités américains. Le projet a été rejeté par le Congrès.

Canada

Le programme de Régime enregistré d'épargne-retraite, plus communément appelé REER, a été institué en 1957 par le gouvernement fédéral canadien, pour permettre aux Canadiens de se constituer un régime complémentaire de retraite en permettant la constitution d'un actif financier défiscalisé, et ce jusqu'au moment de la retraite. Par la suite le produit financier est transféré en Fonds enregistré de revenu de retraite (FERR), où il est remis au contributeur sous forme de complément de retraite, par étalement sur plusieurs années ou par rente viagère. Ce FERR doit être créé par le contributeur obligatoirement au plus tard dans sa 71e année.

1. American Association of Retired Persons (Association américaine des personnes retraitées)

Allemagne

En Allemagne, si la retraite se fait traditionnellement par répartition, une dose plus large de capitalisation a été introduite en 2001, mais cette réforme est freinée par le fait que la retraite par répartition reste plus avantageuse que dans les pays voisins. Un salarié allemand qui part avec 35 ans de cotisation à 63 ans ne subit une décote de 7% alors que dans la même situation, le système de retraite en France lui imposera une décote pour années manquantes de 5% par année, soit 10% en 2010 et 20% après la réforme des retraites en 2010.

En France

En France, la retraite de base est complétée pour les salariés du secteur privé par la retraite complémentaire obligatoire du régime ARRCO-AGIRC² qui repose également sur un mécanisme de répartition.

Le montant de la pension (régime général) dépend de trois éléments :

- le salaire de base ou salaire annuel moyen (SAM) : le salaire annuel moyen représente les salaires bruts sur lesquels les cotisations ont été versées. Le salaire annuel moyen est calculé sur la base des 25 meilleures années de la carrière.
- le taux de liquidation : le taux maximum de 50% est affecté d'un coefficient de minoration déterminé en fonction du nombre de trimestres manquants pour bénéficier du taux plein en tenant compte de la durée d'assurance et de l'âge (le montant le plus intéressant pour l'assuré étant choisi). Le taux minimum est fixé à 37,5%.
- la durée d'assurance et de périodes reconnues équivalentes permet de déterminer le taux de liquidation de la pension entre l'âge légal de départ à la retraite et l'âge d'attribution automatique du taux plein (entre 62 ans et 67 ans pour les assurés nés après le 1er janvier 1955). Le taux plein de 50% résulte de la durée d'assurance (entre 166 et 172 trimestres en fonction de l'année de naissance), de l'âge (67 ans pour les assurés nés à partir de 1955) ou de l'appartenance à une catégorie spécifique (inapte au travail ou handicapé et atteint d'un taux d'incapacité permanente au moins égal à 50%, titulaire d'une pension d'invalidité, mère de famille ouvrière ou ancien combattant).

En Chine

Le système de pension de Chine populaire s'appuie sur deux systèmes de pension :

2. Arrco (association pour le régime de retraite complémentaire des salariés) pour l'ensemble des salariés et Agirc (association générale des institutions de retraite des cadres) pour les cadres.

un rural et un urbain. Le programme rural a été lancé en 2009. Les assurés bénéficiaires de ces programmes seront les groupes à faible revenu, quant au programme urbain entrée en vigueur le 1er juillet 2011, et repose sur cinq piliers : l'assurance vieillesse, l'assurance chômage, l'assurance santé, l'assurance contre les accidents du travail et l'assurance maternité. Les assurances chômage, accidents du travail et maternité ne concernent que les travailleurs urbains, soit un peu plus de 28% de l'ensemble de la population en 2013. La pension augmente à partir de 60 ans.[4]

Autres pays

À la fin de l'année 2006, 28 pays avaient mis en place un système de retraite par capitalisation :

- 11 en Amérique latine (notamment le Chili, où celle-ci est obligatoire depuis la dictature de Pinochet)
- 12 en Europe centrale et orientale
- 5 dans le reste du monde. L'Argentine, qui avait instauré ce système dans les années 1990, sous Carlos Menem, est cependant revenue à un système de retraites par répartition en 2008 à la suite d'une réforme du gouvernement de Cristina Kirchner

La figure 1.1³ présente les régions du monde en fonction du bien-être qu'elle réserve aux personnes de plus de 65 an. On peut y voir clairement que les pays les plus hostiles aux séniors sont en Afrique et en Asie.

1.1.4 Prise en compte de la table de mortalité dans les caisses de retraite

L'âge auquel décèdera un individu est inconnu, il peut tout au plus être évalué pour une population donnée. Il est donc naturel de recourir au calcul des probabilités pour décrire la durée de vie des individus, c'est là qu'intervient la table de mortalité.

On peut définir une table de mortalité comme un outil de mesure des probabilités de décès et de survie ainsi que de l'espérance de vie selon l'âge et le sexe des personnes. Il en existe deux types : la table de mortalité du moment⁴ et la table de mortalité générationnelle⁵, mais avant d'aller plus loin, un bref rappel historique s'impose.

3. ce graphique vient du site internet www.bilan.ch

4. Une table de mortalité du moment se réalise en constituant une génération (ou cohorte) fictive englobant toute la population d'une région quelconque à un moment précis dans le temps.

5. Une table de mortalité par génération se réalise de la même manière qu'une table de mortalité du moment à la différence que, au lieu de constituer une génération fictive, on construit la table en observant les niveaux réels de mortalité d'une génération particulière.

SÉCURITÉ, SANTÉ, QUALITÉ DE VIE... AUTANT DE FACTEURS À PRENDRE EN COMPTE

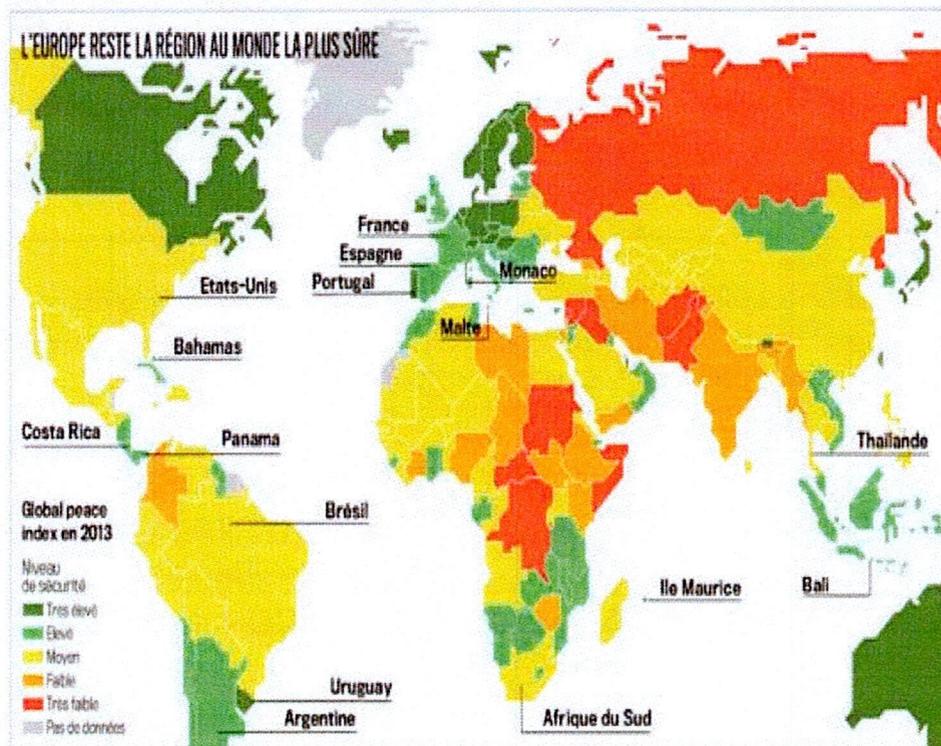


FIGURE 1.1 – Pays où il fait bon vivre après 65 ans

Les rentes viagères sont apparues très tôt en Europe. Dans un texte d'Ulpien (jurisconsulte romain, deuxième siècle après Jésus Christ), on trouve ainsi une table reprenant les coefficients de détermination des valeurs d'annuités viagères, telles qu'elles avaient été fixées par un acte administratif en vue de l'évaluation des droits viagers soumis à l'impôt sur les successions. Ulpien y décrit comment calculer la valeur d'une rente viagère constituée sur une seule tête. Au dix-septième siècle, la rente viagère était un mode de placement très en vogue. En l'absence de tables de mortalité, les taux de rente étaient fixés arbitrairement, sans relation avec l'âge du rentier.

Les premières tables de mortalité furent dressées durant le dix-septième siècle. Les démographes s'accordent généralement à voir dans l'ouvrage d'un mercier⁶ londonien, John Graunt, intitulé *"Natural and political observations upon the Bills of*

6. marchand ambulant qui parcourait villes et villages vendant toutes sortes de marchandises.

mortality" publié en 1662, la première contribution à l'établissement d'une table de mortalité. L'auteur s'appuyait sur les nombres hebdomadaires de décès pour la ville de Londres publiés à partir de 1629 les clercs de la cité.

Christian et Louis Huygens, en échangeant des idées sur la table de Graunt, définirent dès 1669 la notion d'espérance de vie (ou durée de vie moyenne) et de vie probable (durée de vie médiane), valables pour chaque âge. Mais il fallut attendre 1693 et l'astronome Edmund Halley pour voir apparaître la première table de mortalité telle qu'on les connaît aujourd'hui, basée sur les relevés de décès de la ville de Breslau. Après lui, un émigré français, Abraham de Moivre calcula en 1725 les annuités à l'aide d'un modèle très simple décrivant la mortalité [1].

A présent nous allons nous intéresser aux systèmes de retraite en Afrique et dans la zone CIPRES.

1.2 SYSTÈMES DE RETRAITE DANS LA ZONE CIPRES

1.2.1 État de la sécurité sociale en Afrique

D'après un rapport de l'observatoire des retraites, l'Afrique avec une population particulièrement jeune et assez largement rurale ne connaît pas encore la pression du vieillissement. L'espérance de vie à la naissance est inférieure d'une douzaine d'années à la moyenne mondiale : 56 ans pour les hommes, 59 ans pour les femmes. Seule l'Afrique du nord devrait entrer d'ici une quinzaine d'années dans une phase de vieillissement rapide du fait de l'allongement de l'espérance de vie et de la baisse de la fécondité. Aujourd'hui, dans la plupart des pays africains, les régimes de retraite existant ne couvrent qu'une minorité de privilégiés, essentiellement les salariés du secteur public et ceux du secteur privé « formel ». La sécurité sociale n'est pas, sauf exception, populaire. Sa faible extension reflète l'importance du monde rural, mais aussi la faiblesse de l'administration et de l'économie. Le revenu national par habitant des pays africains ne représente que le quart du revenu moyen des habitants de la planète. L'Afrique compte les pays les plus pauvres de la planète avec treize États dans lesquels le revenu annuel moyen était inférieur en 2009 à 1000 dollars américains, soit moins de 10% du revenu moyen mondial. Seuls quelques pays africains atteignent ou dépassent la moyenne mondiale. Une croissance économique particulièrement soutenue est nécessaire pour faire mieux que compenser la croissance de la population.

En Afrique subsaharienne, la couverture par les régimes légaux de sécurité sociale est très limitée et largement confinée aux travailleurs de l'économie formelle et de leurs familles. En effet selon une étude menée par l'OIT en 2019, seule 17,8% de la population en Afrique est couverte par au moins une prestation sociale et seule

9,5% des personnes vulnérables est couverte par l'assistance sociale. Afin d'accompagner les caisses des pays d'Afrique subsaharienne, qui étaient toutes dans une situation financière particulièrement difficile, certaines étant au bord de la cessation de paiement, il a été créé un organe de régulation et de suivi des caisses de retraite : la CIPRES.

1.2.2 Présentation et objectifs de la CIPRES

Créée le 21 septembre 1993 à Abidjan (Côte d'Ivoire) conjointement par les Ministères des Finances et ceux en charge de la Prévoyance Sociale, la CIPRES a pour missions de fixer les règles communes de gestion, instituer un contrôle de la gestion des Organismes de Prévoyance Sociale. Le 09 février 1996, le TOGO a été choisi pour abriter le siège. A son lancement, la CIPRES allie 14 pays Africains de la zone franc à savoir : Bénin ; Bourkina Faso ; Cameroun ; Centrafrique ; Comores ; Congo ; Côte d'Ivoire ; Gabon ; Guinée Équatoriale ; Mali ; Niger ; Sénégal ; Tchad ; Togo.

Elle s'était fixé quatre objectifs :

- fixer les règles communes de gestion
- instituer un contrôle de gestion des Organismes de Prévoyance Sociale (OPS) en vue de rationaliser leur fonctionnement pour mieux garantir les intérêts des assurés sociaux y compris ceux des travailleurs migrants
- réaliser des études et élaborer des propositions tendant à l'harmonisation des dispositions législatives et réglementaires applicables aux organismes et aux régimes de prévoyance sociale
- faciliter la mise en œuvre, par des actions spécifiques au niveau régional, d'une politique de formation initiale et permanent des cadres et techniciens des organismes de prévoyance sociale dans les États membres.

En 2004, la Conférence a fêté ses 10 ans d'existence à Bamako au Mali. A cette occasion, le Conseil des Ministres, réuni en session ordinaire, a décidé de procéder à la relecture des textes de la Conférence. Ainsi, à l'issue des assises de Cotonou en 2007, suivies d'un audit institutionnel de la Conférence, un groupe de travail réunissant des experts des pays membres a été constitué à l'effet de mettre en œuvre les innovations. En 2014, les textes consacrant la réforme juridique et institutionnelle de la CIPRES ont été adoptés par le Conseil des Ministres. Les objectifs de la Conférence ont été portés à six (6) par l'instauration de :

- la Promotion de la prévoyance sociale et le soutien des actions visant à son extension dans les États membres

- l'Institution d'un système d'Appui-conseil et d'assistance aux Organismes de Prévoyance Sociale des États membres.

Le Traité révisé a fait l'objet d'une signature par les plénipotentiaires des États membres lors de la session du Conseil des Ministres tenue du 04 au 06 juin 2014 à Genève (Suisse). Depuis 2016, la CIPRES compte seize (16) États membres suite aux adhésions de la République Démocratique du Congo (2009) et de la République de Madagascar (2016). En 2013, la CIPRES a célébré, à Brazzaville au Congo, ses 20 ans d'existence.

1.2.3 Réalisation de la CIPRES

Vingt ans après sa création, il est heureux de constater que la situation de la gestion des Organismes de Prévoyance Sociale (OPS) s'est fondamentalement améliorée depuis quelques années. Ainsi, en dépit de la persistance de certains problèmes structurels tels que les déséquilibres de la branche des retraites et l'absence de la branche maladie dans un grand nombre des OPS des États membres, l'on peut affirmer que ceux ci se portent mieux. Les améliorations constatées dans la gestion de ces organismes sont la conjonction de plusieurs facteurs, parmi lesquels l'on note indiscutablement la dynamique impulsée par la CIPRES, mais aussi la bonne volonté des différents acteurs des caisses-Tutelle et Organes de gestion, qui de plus en plus ont adopté de nouvelles méthodes de gestion. En effet, les organes de la Conférence et les Experts mutualisent, depuis vingt ans, leurs efforts pour rendre performant la CIPRES et les OPS des états membres, les résultats connus à ce jour. Dans la majorité des organismes, la gestion administrative et technique est améliorée, l'adaptabilité aux nouvelles exigences explicites et implicites connaît des avancées, les ratios et les normes prudentielles de gestion sont mieux cernés et des efforts sont consentis dans le sens de leur application. La mensualité des paiements n'est plus un slogan, l'appropriation des technologies de l'information et de la communication pour l'amélioration et le suivi de la gestion est en développement perpétuel, etc. Ces résultats ont depuis quelques années dépassé les frontières de la zone CIPRES. Les OPS glanent régulièrement, en dehors de la famille CIPRES, des distinctions et reconnaissances. Ainsi, l'AISS a honoré la CNPS du Cameroun et celle de Côte d'Ivoire en leur des prix pour des bonnes pratiques qu'elles ont eu à mettre en œuvre. L'administration gabonaise a attribué à la CNAMGS, le plus prestigieux des prix qu'elle a initié pour encourager l'innovation et la bonne gestion administrative et technique des structures. L'AFAQ AFNOR, un des organismes mondiaux de normalisation, a décerné des certifications ISO 9001 version 2008, à certains des OPS affiliés à la CIPRES.[2]

1.3 CAS PARTICULIER DE LA CRBC

1.3.1 Présentation et objectifs de la CRBC

La CRBC (Caisse de Retraite de la Banque Centrale) a été mise sur pied en conformité avec les aspirations du personnel de la banque des États de l'Afrique centrale. La CRBC, organe de la BEAC jouissant d'une autonomie de gestion, reprend l'actif et le passif du régime de retraite de 1957 et a pour objet de gérer et de garantir au profit des salariés, retraités, et ayant droit du personnel de la BEAC, un régime de retraite complémentaire.

Un règlement intérieur adopté par l'assemblée générale précise les modalités de fonctionnement du régime de retraite.

Les organes d'administration et de gestion de la caisse sont :

- L'assemblée générale qui a pour rôle de :
 - Statuer sur les états financiers de synthèse de l'exercice.
 - Décider de l'affectation du résultat.
 - Entériner la revalorisation annuelle de la valeur du point.
 - Élire les membres du conseil de surveillance.
 - Approuver le rapport d'audit.
 - Approuver les modifications du règlement intérieur sur proposition du conseil de surveillance.
 - Modifier les statuts dans toutes leurs dispositions (dans le cadre d'une assemblée générale extraordinaire).
- Le conseil de surveillance qui a pour rôle de d'orienter et de contrôler la gestion courante de la caisse. Il fixe les modalités des placements des actifs financiers, décide de la revalorisation et de l'affectation de fond de solidarité ⁷
- Le gestionnaire, nommé par le gouverneur, il assure la gestion quotidienne de la CRBC et le secrétariat du conseil de surveillance. Il est investi des pouvoirs qu'il exerce dans la limite de l'objet de la caisse et sous réserve de ceux expressément attribués aux assemblées générales et au conseil de surveillance par les dispositions statutaires.

7. Fonds alimenté par les cotisations patronales au titre des agents ayant quitté le régime avant 5 ans, à l'exclusion des agents décédés, d'une partie des produits financiers, des dons, des legs et des produits divers et des parts patronales des agents licenciés et condamnés pénalement à la suite de poursuites engagées par la banque pour le fait générateur du licenciement.

Compte tenu du faible taux de remplacement du revenu à la retraite, lequel plonge les travailleurs dans l'angoisse à l'approche de l'âge de la retraite, ainsi donc la CRBC a pour but d'accompagner les futurs retraités durant cette période difficile qu'est la retraite. Ce régime de retraite est entré en vigueur à compter du 1er Janvier 1999 et est régi suivant les principes fondamentaux ci après :

- Le régime de retraite fonctionne selon le mécanisme de capitalisation intégrale des engagements⁸. Il s'agit d'un régime de cotisation définies⁹, dans lequel chaque cotisation est transformée en promesse de rente viagère, éventuellement réversible, avec une possibilité de sortie partielle en capital au moment du départ à la retraite.
- Le traitement des réversions des retraités et des actifs est défini progressivement au fil du temps par le conseil de surveillance, vu la complexité des situations familiales.
- Le statut pose le principe général de la référence au disposition de droit commun.
- Par défaut, le principe d'équivalence actuarielle est retenu : il consiste à exprimer différentes promesses dont la valeur est identique ; ainsi il est équivalent actuariellement de verser une rente non réversible d'une part, et de verser une rente disposant d'une réversion, d'autre part, étant entendu que cette rente réversible est d'un montant plus faible.

Sur le plan technique, la CRBC est un régime par points¹⁰ dont le taux global de cotisation est actuellement de 24% du salaire de base (Éléments permanents du salaire non représentatifs des frais, auxquels s'ajoutent les gratifications et les primes de vacances).

La cotisation versée par le BEAC est égale au double de celle versée par l'agent en activité, soit 16% par la banque et 8% par l'agent en activité. Ainsi la caisse de retraite garantit à ses adhérents une rente viagère différée avec contre assurance¹¹ de l'épargne accumulée.

Cette rente peut sur demande de l'agent être réversible, anticipée (sous certaines

8. La retraite par capitalisation est un système de retraite qui fonctionne par l'accumulation d'un stock de capital par le biais des travailleurs. Ce stock de capital permet de financer les pensions de ces mêmes travailleurs lorsqu'ils deviendront inactifs.

9. contrat dans lequel l'engagement porte sur le montant de la cotisation et non sur le niveau de la pension

10. Dans un système par points, un actif cotise et accumule chaque année un certain nombre de points. Au moment de partir à la retraite, ce nombre total de point est converti en pension.

11. Mécanisme qui permet dans les assurances en cas de vie de verser au décès de l'adhérent un capital décès à des bénéficiaires désignés.

conditions) ou prorogée. Le taux d'actualisation est de 3% pour les droits acquis avant le 1^{er} Janvier 1999 et de 2% pour ceux acquis à compter de cette même date, la table de mortalité utilisée est la CIMA F.

1.3.2 Problématique de la caisse de retraite

Les produits avec sortie en rente viagère présentent un niveau de mutualisation inévitablement élevé, puisqu'ils transfèrent d'importantes masses financières des personnes à faible durée de vie vers les retraités de longévité supérieure à la moyenne. Cette caractéristique n'est souvent pas appréciée des adhérents car en cas de décès prématuré à la retraite, l'épargne constituée est simplement perdue. Ainsi donc les adhérents de la CRBC estiment que leur mortalité est supérieure à celle prédite par la table réglementaire (CIMA F) dénonçant ainsi toutes les conséquences liées à cette affirmation, à savoir :

- Une tarification bien trop élevée
- un temps de récupération de l'épargne plus long que l'espérance de vie restante à la retraite

C'est dans ce contexte notre organisme d'accueil de stage nous a confié comme tâches :

- Analyser la mortalité des agents de la BEAC et la comparer à ce que prévoit la table réglementaire.
- Construire une table de mortalité d'expérience reflétant au mieux le risque couvert par la CRBC.
- Mesurer les impacts financier qu'une telle table pourrait avoir.

Chapitre 2

DESCRIPTION ET ANALYSE DE LA BASE DE DONNÉES

« Dans un monde idéal, les données seraient toujours complètes, exactes, actuelles, pertinentes et sans ambiguïtés. Dans le monde réel, elles sont généralement imparfaites sur l'une ou sur l'ensemble de ces dimensions » (Feeney 2003 : 190).

La construction d'une table de mortalité est un exercice d'estimation statistique dont la robustesse est fortement liée à la qualité des données utilisées, l'objet de ce chapitre est de décrire la base de données, de présenter les retraitements effectués afin d'obtenir une base de données reflétant au mieux l'historique de la mortalité et ne contenant pas d'informations erronées .

2.1 DESCRIPTION DE LA BASE DE DONNÉES BRUTES

Nous disposons d'une base de données constituée en 1999 (date de la création de la CRBC) bien que certaines informations datent d'avant 1999. Elle est constituée de 8 variables pour 5996 observations, les 8 variables sont en fait les informations sur 5996 individus enregistrés à la CRBC. ci dessous, la Table 2.1 décrivons les 8 variables. Lorsque qu'aucune précision n'est faite dans la description de la variable, nous déduisons que cette dernière est complètement renseignée.

Notons que cette base de données contient à la fois les informations des adhérents et des ayants droit lorsque la réversion a dû se faire.

Numéro CRBC	variable numérique correspondant au matricule unique attribué à l'adhérent.
Sexe	F pour (féminin) et M pour (masculin). Cette variable contient 6 données manquantes.
Date de naissance	Elle contient les dates de naissance de toutes les personnes enregistrées dans le portefeuille.
Date d'entrée CRBC	Elle donne la date à laquelle l'individu a adhéré à la CRBC.
Date retraite	Elle donne la date de retraite au cas échéant des adhérents. Elle est renseignée à 24,4%.
Date décès	Elle donne la date de décès de l'adhérent au cas échéant. Elle est renseignée à 11,9%.
Centre de rattachement	Variante de type caractère. elle donne l'indicatif de la ville de rattachement de l'adhérent.
Statut CRBC	Variante de type caractère, elle donne la situation de l'adhérent ou de l'ayant droit en fonction des cas.

TABLE 2.1 – Description des variables de la base

Notre étude ne portant que sur la mortalité des adhérents, un retraitement préliminaire permettra de distinguer les données relatives aux adhérents de celle des ayants droit ceci à l'aide de la variable "*Statut CRBC*". Cette variable présente 24 modalités dont le détail est présenté dans la Table 2.2 ci dessous.

La base de données telle qu'elle a été transmise comprend 2636 femmes et 3354 hommes, avec 6 adhérents dont le sexe n'a pas été renseigné.

Dans la section suivante de ce chapitre, nous allons effectuer les différents contrôles et retraitements nécessaires afin de constituer une base de données utilisable pour la construction de la table de mortalité.

ADE	Agent détaché
ADI	Agent actif mis en disponibilité
AGE	Agent actif
ANC	Agent actif non cotisant (ancien régime)
ASP	Agent actif suspendu
BEM	Bénéficiaire de rente illimitée décédé
BEN	Bénéficiaire de rente illimitée
BER	Bénéficiaire de rente illimitée remboursé
DAL	Agent actif décédé (contre-assurance liquidée)
DCA	Agent actif décédé
DCR	Agent retraité décédé
DRA	Agent actif non cotisant (ancien régime) dont les PM sont neutralisés
DRB	Agent actif non cotisant (ancien régime) dont les PM sont partiellement neutralisés
DRC	Agent non cotisant (ancien régime) dont les PM sont partiellement neutralisés
DRL	Agent retraité décédé (reversion liquidée)
ENF	Bénéficiaire de rente d'éducation
ENM	Bénéficiaire de rente d'éducation décédé
ENR	Enfant bénéficiaire de rente d'éducation remboursé
ENS	Bénéficiaire de rente d'éducation ayant atteint la limite d'âge
LIR	Agent actif licencié (droits remboursés)
LSC	Agent actif licencié
RET	Agent retraité
SNR	Stagiaire non titularisé remboursé
SNT	Stagiaire non titularisé

TABLE 2.2 – Détail sur la variable "Statut CRBC"

2.2 CONTRÔLES ET RETRAITEMENTS SUR LA BASE DE DONNÉES

Dans cette section nous effectuons des contrôles et retraitements afin de nous rassurer que la base de données est cohérente et reflète au mieux la mortalité de des agents de la BEAC.

Les retraitements sont réalisés après consultation des statuts et du règlement intérieur de la CRBC, rappelons que l'âge de départ à la retraite pour les agents de la BEAC est fixé à 60 ans sauf disposition nationale contraire, et l'agent dispose de la possibilité d'anticiper la liquidation de la retraite dans la limite de 5 années. Nous avons créé les variables : "*ageDec*" pour âge au décès, "*ageSurv*" donnant les âges des personnes vivantes au 28 Mai 2021 et "*statut28Mai*" donnant la valeur "1" si l'individu est déjà décédé et "0" sinon.

- **Suppression des individus non concernés par l'étude**

La base de données contient aussi des informations relatives aux bénéficiaires des réversions et notre étude porte sur les adhérents de la CRBC. Ainsi un premier retraitement a consisté à supprimer toutes les observations dont le statut CRBC est : BEN, BEM, BER, ENF, ENM, ENR, ENS, SNR et SNT. En effet il s'agit là de bénéficiaires de réversions (Enfants, conjoints...) et de stagiaires non titularisés. Suite à ce retraitement nous perdons 1384 enregistrements.

Nous avons aussi trouvé 8 adhérents dont l'âge au décès est inférieur à 55 ans et pourtant ils ont un statut de "*DRL*" : il doit s'agir de bénéficiaires de réversion alors nous les avons supprimé.

- **Suppression des doublons**

La variable "*Numero CRBC*" n'a présenté aucun doublon. Il s'est avéré après investigation que certains adhérents apparaissent plusieurs fois dans la base et avec des numéros CRBC différents, afin de mieux identifier les doublons, il nous a été fournie une nouvelle base comportant des variables supplémentaires dont la variable "*Date dernière cotisation*", variable que nous avons ajouter à notre base de données. Ainsi nous avons fait une nouvelle recherche de doublons en effectuant une comparaison simultanée sur les variables : "*Sexe*", "*Date de naissance*", "*Date d'entrée*", "*Date de décès*", "*Centre de rattachement*", "*Date dernière cotisation*". Il en résulte qu'il y a 30 doublons dans la base de données, lesquels ont été supprimés.

- **Vérifications d'usage**

Quelques vérifications d'usage nous ont permis de nous rassurer qu'il n'y avait :

- Aucune date de naissance n'est postérieure au 28 Mai 2021 ¹.
- Aucun décès n'est enregistré après le 28 Mai 2021.
- Aucune entrée à la CRBC n'est enregistré après le 28 Mai 2021.
- Aucune date de décès n'est antérieure à la date de naissance.

- **Date de naissance plus récente que la date d'entrée à la CRBC .**
Nous avons trouvé dans la base de données un adhérent dont la date de naissance est plus récente que la date d'entrée à la CRBC. Et faute d'information supplémentaire, nous l'avons supprimé.
- **Faux décès**
Nous avons trouvé dans la base un adhérent avec une date de décès renseignée alors que son statut CRBC est "AGE". Après vérification nous nous sommes rendus compte que cette adhérent est encore en vie, nous avons donc remplacé cette date de décès par le vide (NA) ².
- **Absence de date de décès**
Nous avons dans la base de données 23 enregistrements de personnes décédés de par leurs statuts mais dont la date de décès n'est pas renseignée, nous les avons supprimé de la base.
- **Agents licenciés**
Nous avons 44 agents licenciés (droits remboursés) et 83 agents licenciés "LSC" sans date de sortie, Ainsi nous considérons leurs dates de dernière cotisation comme date de fin d'observation.
- **Agents à la retraite**
Nous avons trouvé un retraité âgé de moins de 55 ans mais après vérification, nous nous sommes rendus compte qu'il s'agit d'un cas particulier, nous l'avons garder dans la base.
- **Date de décès antérieure à la date d'entrée CRBC**
Nous avons trouvé 7 enregistrements ayant la date de décès qui est antérieure à la date d'entrée, avec le statut "DAL". Ainsi nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ont été vivant au moins jusqu'au mois de leurs dernières cotisations. Nous prendrons la date de dernière cotisation comme date de décès.
- **Agents à période d'exposition ambiguë**
Nous avons 40 enregistrements dont il sera difficile voir impossible de déterminer les périodes d'expositions car ces personnes sont issues de l'ancien régime (avant le premier janvier 1999) et leurs dates de dernière cotisation ne sont pas précisées. Nous les avons supprimé de la base.

1. Date à laquelle nous avons reçu la base de données.
2. "Not available" en langage R

- **Dates de naissance erronées**

Après avoir ajouter le variable "Âge entrée", nous nous sommes rendu compte qu'il y a des agents ayant un âge à l'entrée inférieur à 21 ans³. Ne pouvant retrouver les vraies dates de naissance de ces adhérents, nous n'avons d'autres choix que de les supprimer, ainsi nous supprimons 158 observations.

Ce constat pose problème de l'intégrité des données que nous avons, en effet il serait possible que d'autres dates de naissance soient erronées mais sans pour autant généré des âges à l'entrée inférieurs à 21 ans, ce qui nous interpelle une fois de plus sur la vigilance lorsque nous saisissons des donnée, sans oublier le caractère très peu fiable des bureaux d'état civil en Afrique.

Après ces retraitements nous obtenons une base de données de 4352 observations (lignes) ce qui est clairement un très petit nombre de données pour construire une table de mortalité, nous espérons néanmoins que le fait que ces données soient relatives à un produit de rente viagère nous permettra d'avoir assez d'expositions puisque les adhérents sont observés jusqu'au décès.

Dans la partie suivante, nous commencerons par une étude de l'hétérogénéité, ensuite nous analyserons la mortalité et les expositions.

2.3 ANALYSE STATISTIQUE DE LA BASE DE DONNÉES OBTENUE

2.3.1 Hétérogénéité

La construction d'une table de mortalité pour une organisation multi-étatique ne peut se soustraire au problème d'hétérogénéité. En effet les agents de la BEAC sont des ressortissants des 6 pays de la CEMAC caractérisés par la diversité culturelle, les habitudes alimentaires et le niveau de vie.

La table 2.3 présente les espérances de vie à la naissance de chacun des pays de la CEMAC ainsi que les effectifs des populations. Tenant compte des différents niveaux de population, nous avons une espérance de vie moyenne de 56,76 pour un écart type de 3,88.

Nous sommes amenés à étudier la mortalité de personnes soumises à des environnements différents et donc à des statistiques drastiquement différentes. La Figure 2.1 présente la répartition des agents de la BEAC par pays de rattachement, notons que la dénomination "INCO" indique que le pays de rattachement n'est pas connu pour ces agents là.

Nous y remarquons qu'une grande majorité des agents de la BEAC est au Cameroun, un très petit nombre à Paris et le reste des agents est presque qu'équitable-

3. 21 ans est l'âge minimum pour être recruté à la BEAC

Pays	Espérance de vie	Population (En millions)
Cameroun	57,3	23,3
Tchad	53,1	14,11
RCA	52,5	4,493
Guinée Équatoriale	58,2	1,169
Congo	64,7	4,856
Gabon	66	1,948

TABLE 2.3 – Espérances de vie des pays de la CEMAC (Site internet de l’OMS)

ment réparti dans les autres pays. Ceci expose l’étude à un risque d’hétérogénéité et à un risque de modèle, cependant il est à préciser que ce risque d’hétérogénéité est moindre que celui généré par les tables CIMA H et CIMA F car en effet les écarts de mortalité sont bien plus significatifs entre la zone CEMAC et la zone UEMOA qu’entre les pays de la zone CEMAC. Vue cette répartition, on devrait en principe s’attendre à avoir des résultats proches des statistiques camerounaises.

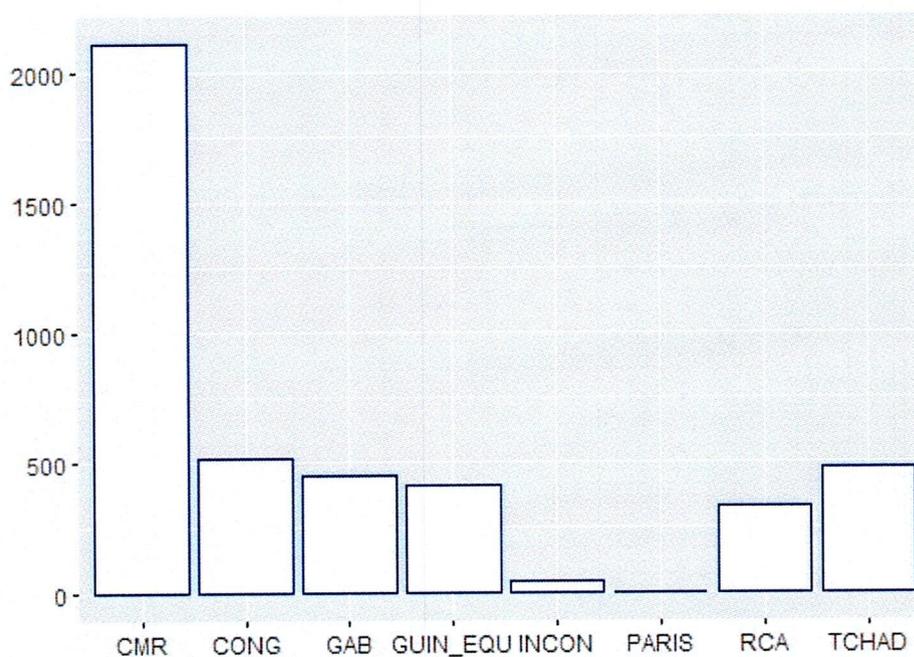


FIGURE 2.1 – Répartition des agents de la BEAC par pays

2.3.2 Mortalité

La base de données obtenue après retraitement présente un total de 600 décès pour 4352 observations. L'âge minimum au décès est de 27,5 ans et l'âge maximum est de 89 ans⁴. L'âge moyen global au décès est de 59,23 ans, l'âge moyen au décès pour les personnes ayant atteint la retraite est de 70,78 ans et l'âge moyen au 28 mai 2021 pour les adhérents encore en vie est de 50,31 ans.

Nous rappelons ici que l'une des raisons de cette étude est que les adhérents de la CRBC estiment qu'ils sont désavantagés vu le paramétrage de la caisse. En effet ils pensent que la table de mortalité utilisée (CIMA F) sous-estime leur mortalité en proposant une espérance de vie à 60 ans de 26,54 ans. Ainsi, avec cette espérance de vie, adhérent arrivant à la retraite, récupérera la totalité de son épargne s'il atteint 86,54 ans. Ce qui est rare car l'analyse de la base de données révèle que 98,16% des décès surviennent avant 86 ans et 96,49% des personnes ayant atteint l'âge de la retraite décèdent avant 86 ans. La Figure 2.2 représente sur une boîte à moustache la répartition des décès survenus après 60 ans, on voit clairement que 50% des personnes ayant atteint l'âge de la retraite décèdent avant 71 ans environ.

4. Nous précisons qu'il y a des personnes vivantes de plus de 89,6 ans dans la base.

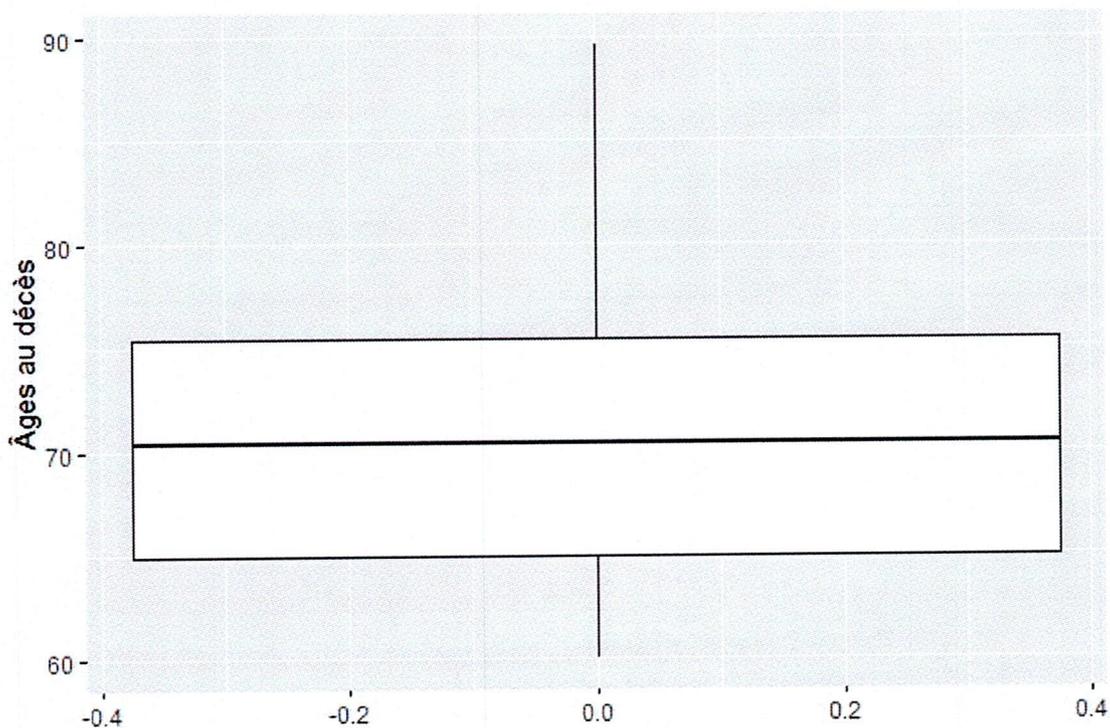


FIGURE 2.2 – Boîte à moustache des âges au décès des retraités

La Figure 2.3 ci dessous présente la répartition des âges au décès des agents de la BEAC. Ainsi la plage d'âge où il y a le plus de décès est 70-75 ans .

Une analyse plus fine à l'aide de la Figure 2.4 révèle que l'âge où il y a le plus de décès est 70 ans. Bien que ce graphique présente une forme générale assez cohérente, nous remarquons quand même la présence de plusieurs sauts, ce qui traduit une forte volatilité certainement due au petit nombre de données.

La Figure 2.5 présente les taux de mortalité⁵ de 2008 à 2018. La ligne bleue représente un ajustement sur ces taux de mortalité ainsi que l'intervalle de confiance à 5% de risque correspondant, on peut y observer comme une modification conjoncturelle dans le temps, cela peut très simplement être causée par le très faible nombre de données ou un phénomène passager.

5. Notons que ces taux sont calculés par un simple rapport entre le nombre de décès dans l'année et l'exposition totale sur l'année considérée.

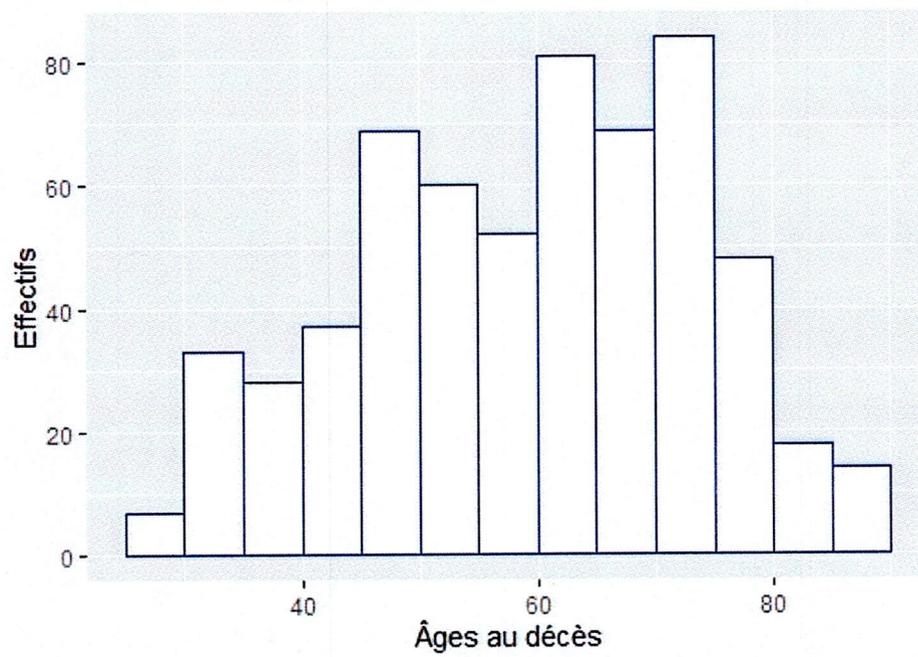


FIGURE 2.3 – Répartition des âges au décès (sauts de 5 ans)

En fin la Figure 2.6 présente la distribution de densité associée à cette répartition des décès, donnant ainsi une idée sur les probabilités de décès pour ces âges là.

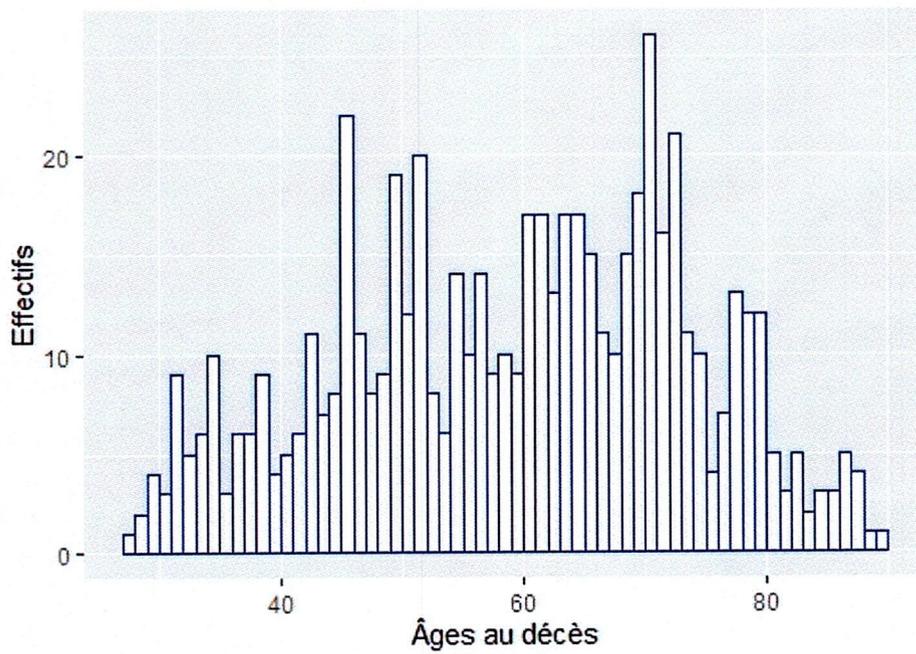


FIGURE 2.4 – Répartition des âges au décès (sauts d'un an)

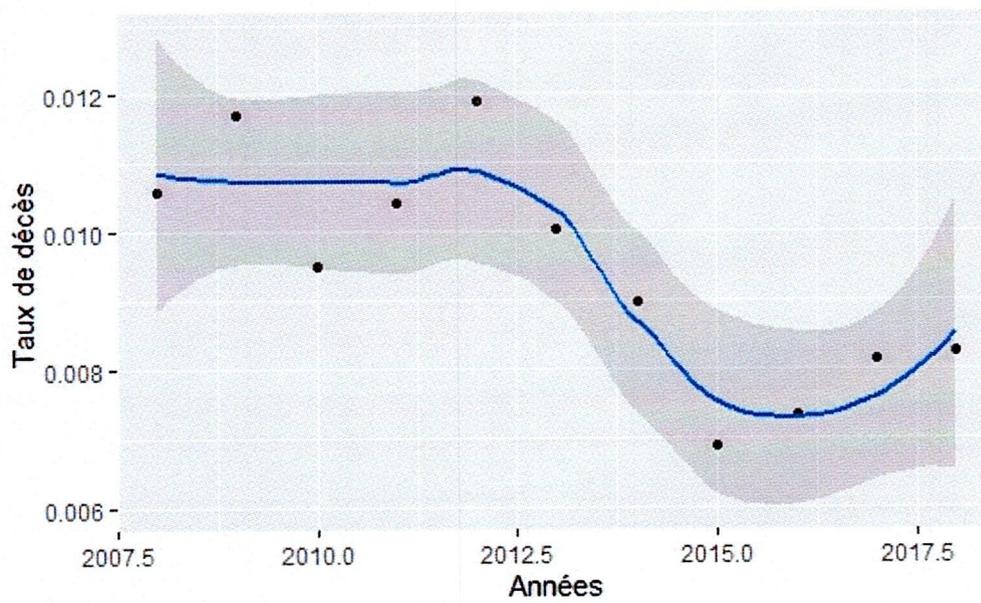


FIGURE 2.5 – Évolution de la mortalité entre 2008 et 2018

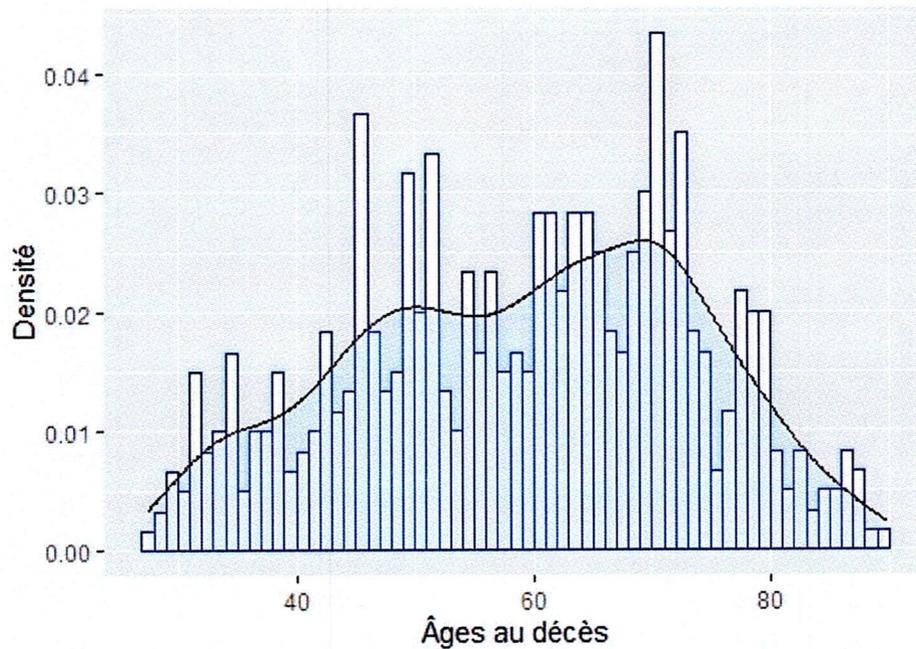


FIGURE 2.6 – Courbe de densité des décès

2.3.3 Expositions

Dans cette sous-section nous allons nous intéresser à l'exposition présente dans le portefeuille.

On peut définir l'exposition comme étant le nombre d'**années-vie**⁶ exposées au risque de décès pendant la période de l'étude [3]. Si l'on désigne par E_x l'exposition globale du portefeuille pour un âge x et par $[\alpha_i^x; \beta_i^x]$ l'intervalle inclus dans $[x; x+1[$ pour lequel l'adhérent i est exposé à l'âge x , ainsi en notant I l'ensemble de tous les adhérents, alors l'exposition globale du portefeuille à l'âge x est donnée par :

$$E_x = \sum_{i \in I} (\beta_i^x - \alpha_i^x) \quad (2.1)$$

Si l'on désigne par E l'exposition totale sur le portefeuille et par X l'ensemble des âges présents dans le portefeuille alors l'exposition totale sur le portefeuille est donnée par :

$$E = \sum_{x \in X} E_x = \sum_{x \in X} \sum_{i \in I} (\beta_i^x - \alpha_i^x) \quad (2.2)$$

Dans le cas de nos données, nous avons une exposition globale de 93592,39 ce qui est un assez bon niveau d'exposition vu la quantité de données dont nous dispo-

6. Unité permettant de quantifier l'exposition

sons. Cela s'explique certainement par le fait que contrairement aux compagnies d'assurance qui dans la zone vendent plus des contrats "Décès emprunteur", nous sommes ici dans le cas des rentes viagères ce qui nous permet d'observer les adhérents sur une période beaucoup plus longue.

Pour ce qui est des expositions par âge, la Figure 2.7 présente leurs répartitions en fonction des âges. Notons que nous avons une exposition moyenne de 1049,973 années-vie, l'âge ayant l'exposition la plus élevée est 36 ans et entre 25 et 63 ans nous avons des expositions supérieures à 1000 années-vie. La courbe des expositions (la courbe bleue) illustre par sa forte décroissance une forte baisse des expositions à partir de 36 ans. Ce qui est certaine le signe qu'à cet âge il n'y a plus beaucoup de recrutements et les décès qui augmentent. Aussi à partir de 63 ans, les expositions sont inférieures à 1000 années-vie et chutent rapidement, ce qui montre qu'un grand nombre d'agents de la BEAC ne profitent pas assez de leurs retraites.

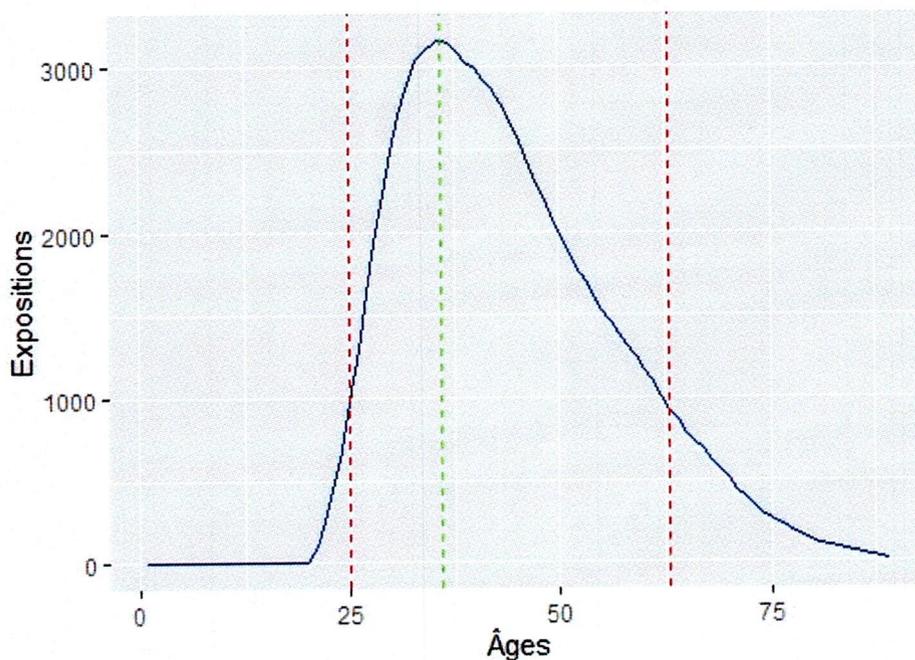


FIGURE 2.7 – Répartition des expositions par âge

Cette étude statistique que nous venons de mener semble montrer dans sa globalité que la mortalité des adhérents à la CRBC est plus élevée que le prévoit la table réglementaire (CIMA F), mais nous ne pouvons tirer aucune conclusion sur la base de cette simple étude statistique, ainsi nous approfondissons l'étude dans le chapitre suivant par la construction d'une table de mortalité propre aux

adhérents de la CRBC à l'aide de modèle appropriés à cet effet.

Chapitre 3

CONSTRUCTION DE LA TABLE DE MORTALITÉ D'EXPÉRIENCE ET ANALYSE DES IMPACTS

«Le calcul des probabilités, appliqué à la mortalité humaine a donné naissance à une science nouvelle : celle des assurances.» (Emile de Girardin)

Dans ce chapitre nous allons procéder tout d'abord à une validation des données et nous déterminerons la plage d'âges optimale afin d'estimer les taux brutes de mortalité, ensuite nous passerons de la table et nous terminerons par une analyse des impacts de cette table sur le paramétrage de la caisse de retraite (CRBC).

3.1 VALIDATION DES DONNÉES ET DÉTERMINATION DE LA PLAGE D'ÂGES OPTIMALE

3.1.1 Le critère de Cochran

Avant de construire une table de mortalité, il est nécessaire de s'assurer que les données sont suffisantes et de qualité. Le critère de Cochran est un critère qui permet vérifier que les données sont suffisantes, en effet ce critère demande qu'au moins 80% des classes d'âges aient au moins 5 sinistres et que chaque plage d'âge ait au moins un sinistre.[5]

Si l'on note N_x le nombre de personnes soumises au risque à l'âge x et D_x la variable aléatoire donnant le nombre de décès à l'âge x , on définit l'estimateur du

taux de décès à l'âge x par :

$$\hat{Q}_x = \frac{D_x}{N_x} \quad (3.1)$$

Soit d_x une des réalisations de D_x et q_x une estimation du taux de décès à l'âge x alors on a la relation 3.2 :

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{N_x} \quad (3.2)$$

des inégalités 3.4 :

$$N_x \hat{q}_x \geq 5 \quad (3.3)$$

$$N_x (1 - \hat{q}_x) \geq 5 \quad (3.4)$$

on obtient :

$$d_x \geq 5 \quad (3.5)$$

Dans le cas de nos données, la Figure 3.1 nous montre que sur la plage d'âge de 30 à 80 ans, nous n'avons que quatre âges sur lesquels il y a moins de 5 décès. Cette même figure nous montre que tous ces âges ont au moins un décès. Notons que ces vérifications sont effectuées avant la restriction à une fenêtre d'observation.

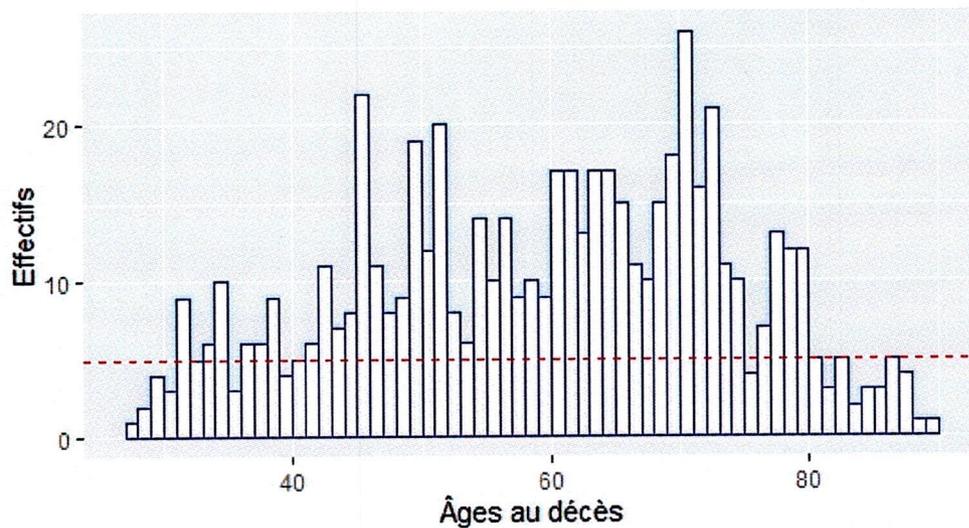


FIGURE 3.1 – Application du critère de Cochran sur les données

3.1.2 La fenêtre d'observation et notion de censure

la fenêtre d'observation est l'intervalle de temps retenu pour l'étude de la mortalité. Il doit par conséquent faire l'objet d'un choix minutieux. Ainsi donc cette période d'observation doit idéalement inclure les années les plus récentes possible, mais pour tenir compte des déclarations tardives de décès, il faut veiller à prendre un recul suffisant entre la date de fin d'observation et la date d'extraction des données. Aussi la durée d'observation doit en principe être un multiple de 12 mois et cette durée d'observation doit comporter plusieurs années sans pour autant être très longue à moins de prendre quelques précautions. En fait une période d'observation de 5 ans c'est l'idéale, pour prendre une période plus longue, il faudrait vérifier qu'il n'y a pas d'évolution palpable de la mortalité sur cette période.

Dans le cas de nos données, nous n'avons pas d'autre choix que de considérer une période d'observation de 10 ans afin d'avoir toujours un nombre de données suffisant, notre période d'observation va du 1^{er} Janvier 2008 au 31 Décembre 2017, cette période nous permet d'avoir un bon recul sur les déclarations tardives de décès et surtout d'avoir au moins un sinistre à tous les âges compris entre 33 et 81 ans telle qu'illustrés sur la Figure 3.2. Considérer une période d'observation de 10 ans nous expose à une évolution structurelle de la mortalité, mais nous faisons l'hypothèse qu'étant donné qu'il y s'agit d'une table de mortalité pour une caisse de retraite, prendre un peu d'évolution structurelle de la mortalité ne serait pas forcément préjudiciable.

Nous avons alors obtenu une base de 3667 ligne pour 377 décès dont 276 survenus durant la période considérée.

Lors de l'étude de la mortalité, les personnes étudiées entrent et sortent du champ de l'étude à des dates presque toujours différentes, cette contrainte logistique fait intervenir le phénomène de censure. Nous définissons ici ce concept ainsi que quelques termes usuels en analyse de survie.

La date d'entrée est la date à laquelle l'individu est inclus dans l'étude et à partir de laquelle il est suivi dans le temps. Dans notre étude, elle est fixée au 1^{er} Janvier 2008.

La date de point est la date à partir de laquelle on décide de ne plus suivre les individus, dans le cas de notre étude elle est fixée au 31 Décembre 2017.

La censure : On parle de censure lorsqu'au cours du suivi d'un individu, l'évènement (décès) n'a pas été observé [6]. La censure à droite correspond au cas où l'évènement n'est pas observé chez l'individu jusqu'à la date de point et la censure à gauche c'est lorsqu'il a été observé chez l'individu avant la date d'entrée, ainsi on ne dispose d'aucune information sur la date à laquelle l'évènement est survenu.

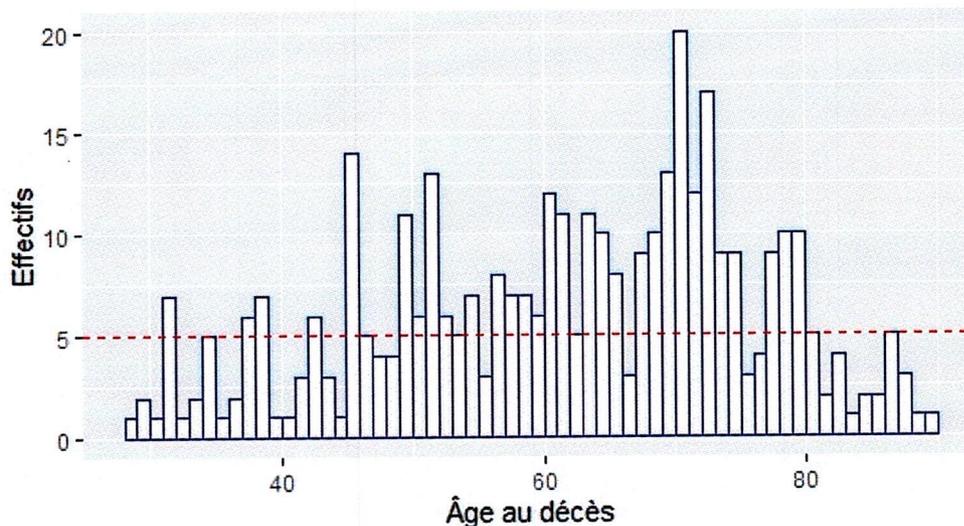


FIGURE 3.2 – Répartition des décès dans la base obtenue après restriction à la période d'observation

Un individu est dit **perdu de vue** s'il n'est plus suivi avant la date de point sans avoir présenté l'évènement et la date jusqu'à laquelle on sait de façon certaine qu'un individu perdu de vue n'avait pas présenté l'évènement est appelée **date de dernière nouvelle**.

3.2 ESTIMATION DES TAUX BRUTS DE MORTALITÉ

Dans cette partie nous allons passer à l'estimation des taux bruts de mortalité à l'aide de deux approches : la méthode de Hoem et celle de Kaplan Meier, ensuite nous comparerons les résultats obtenus.

3.2.1 Estimation par la méthode de Hoem

Estimateur de Hoem est un estimateur assez intuitif des taux de mortalité car il est simplement construit comme le rapport entre le nombre de décès à un âge et la somme des expositions totales à cet âge là, avec cette fois pour convention de mettre une exposition de 1 à toute personne décédé à l'âge considéré. Ainsi on a l'expression 3.6.

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_{i \in I} ([\alpha_i; \beta_i] \cap [x; x+1])} \quad (3.6)$$

Avec :

- \hat{q}_x l'estimation de la probabilité de décéder à l'âge x .
- d_x est la réalisation de la variable aléatoire D_x du nombre de décès observé sur $[x; x+1]$.
- $[\alpha_i; \beta_i]$ est l'intervalle pour lequel l'assuré i est sous observation.

L'intervalle de confiance [14] sur les taux bruts de Hoem est donné par l'expression :

$$\hat{q}_x \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{q}_x(1 - \hat{q}_x)}{R_x}} \quad (3.7)$$

où :

- $u_{\frac{\alpha}{2}}$ désigne le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite et $1 - \alpha$ le niveau de confiance.
- R_x est la taille de l'échantillon d'âge x .

Après application de la méthode sur nos données, sur la plage d'âges allant de 33 à 80 ans, les taux bruts de mortalité obtenus par l'estimateur de Hoem sont présentés dans la Figure 3.3. Ces taux bruts présentent logiquement une tendance croissante ainsi qu'une certaine volatilité pour les âges supérieurs à 75 ans.

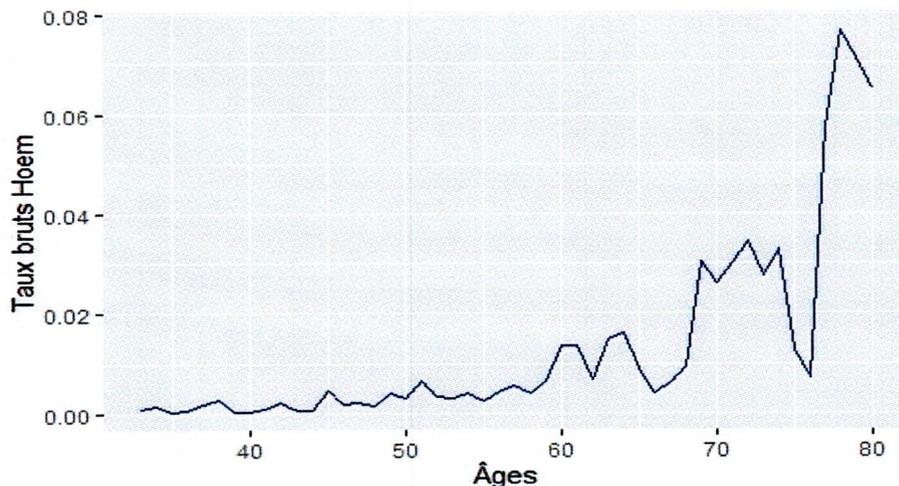


FIGURE 3.3 – Taux bruts de Hoem de 33 à 80 ans

3.2.2 Estimation par la Méthode de Kaplan-Meier

L'estimateur de Kaplan-Meier également appelé estimateur produit-limite est introduit en 1958 par Edward L. Kaplan et Paul Meier [11], c'est un estimateur non paramétrique qui présente l'avantage de prendre en compte les données censurées à droite.

Soit q_x la probabilité (Que nous voulons estimer) qu'une personne d'âge x décède avant son prochain anniversaire, on a la relation 3.8 :

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} \quad (3.8)$$

où p_x est la probabilité qu'une personne d'âges x fête son prochain anniversaire et $S(x)$ la fonction de survie à l'âge x . Nous cherchons ainsi à estimer la probabilité qu'une personne x décède dans l'intervalle $[x; x+1[$. Nous pouvons diviser l'intervalle $[0; 1]$ en n petits instants t_i tels que : $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$ où les t_i sont les instants auxquels ont lieu des évènements. La relation 3.8 nous garantit qu'avoir une estimation de $S(x+t_i)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ nous permet d'avoir une estimation de q_x .

En considérant la variable aléatoire T donnant la durée de vie d'un individu.

Pour tout $i = 2, 3, \dots, n$ on a :

$$P(T > x + t_i / T > x + t_{i-1}) = \frac{P(T > x + t_i; T > x + t_{i-1})}{P(T > x + t_{i-1})} \quad (3.9)$$

$$= \frac{P(T > x + t_i)}{P(T > x + t_{i-1})} \quad (3.10)$$

$$= \frac{S(x + t_i)}{S(x + t_{i-1})} \quad (3.11)$$

On obtient ainsi la relation 3.12 :

$$S(x + t_i) = P(T > x + t_i / T > x + t_{i-1}) S(x + t_{i-1}) \quad (3.12)$$

En supposant que notre individu a déjà survécu jusqu'à l'âge x , on peut écrire :

$$S_x(t_i) = P(T_x > t_i / T_x > t_{i-1}) \quad (3.13)$$

où S_x est la fonction de survie pour les personnes ayant déjà atteint l'âge x et T_x la variable aléatoire donnant la durée de vie restante après l'âge x . En réitérant ce procédé on obtient une expression de $S_x(t_i)$ comme produit d'éléments de la forme $p_i = P(T_x > t_i / T_x > t_{i-1})$, c'est à dire :

$$S_x(t_i) = \prod_{j=1}^i p_j \quad (3.14)$$

En posant $p_j = 1 - q_j$ et en considérant $\frac{d_j}{n_j}$ l'estimateur naturel de q_j on a :

$$S_x(t_i) = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right) \quad (3.15)$$

où d_j est le nombre de personnes décédées à l'âge $x + t_j$, n_j le nombre de personnes observées entre les âges $x + t_{j-1}$ et $x + t_j$.

La relation permettant de calculer n_j [13] est donnée par :

$$n_j = n_{j-1} + e_j - c_j - d_{j-1} \quad (3.16)$$

Avec e_j le nombre de personnes entrées dans l'étude à l'âge $x + t_{j-1}$ et c_j le nombre de censures à l'âge $x + t_{j-1}$.

Après application de ceci sur nos données, nous présentons directement un comparatif entre les taux bruts obtenus par la méthode de Hoem et ceux obtenus par la méthode de Kaplan-Meier sur la Figure 3.4. Nous constatons une similitude tellement parfaite que nous pouvons nous permettre de choisir indifféremment entre l'un des deux résultats pour notre lissage, ainsi nous décidons de continuer avec les taux bruts obtenus par la méthode de Hoem.

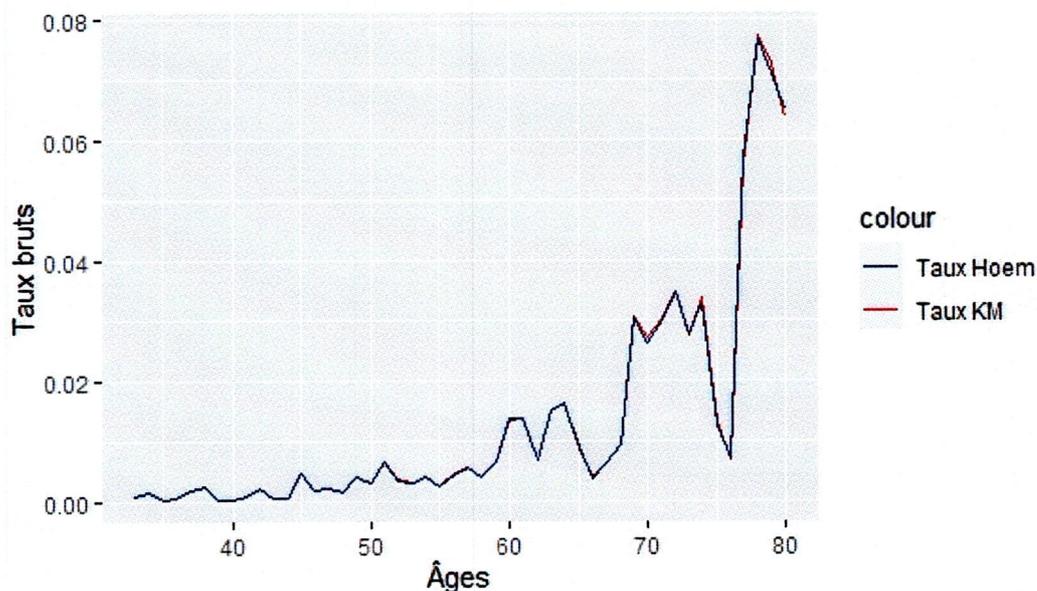


FIGURE 3.4 – Taux bruts Hoem et Kaplan-Meier

3.3 LISSAGE DE LA TABLE DE MORTALITÉ

Après cette étape incontournable du calcul des taux bruts, les valeurs obtenues présentent une variabilité qu'il est nécessaire de gommer afin de ne conserver que la partie déterministe du modèle. Nous allons précéder au lissage sur la plage d'âges de 33 à 80 ans ainsi nous disposerons déjà d'une partie de notre table de mortalité. Dans le cas d'un petit nombre de données comme le notre, un lissage par le modèle de Brass est pertinent, il permet de s'appuyer sur une table de référence.

Le modèle de Brass (1971) est un modèle relationnel à deux paramètres basé sur une relation linéaire entre les logits des taux de décès de la population étudiée et ceux de la population de référence. Un ajustement classique permet de modéliser la plus grande partie des données avec une grande fiabilité.

On définit la fonction logit comme la fonction qui à x associe $\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$, alors en notant q_{exp} les taux de décès d'expérience et q_{ref} les taux de décès de la population de référence (ici la table CIMA F), le modèle de Brass est donné par la relation 3.17 :

$$\text{logit}(q_{exp}) = \beta_0 + \beta_1 \text{logit}(q_{ref})^1 \quad (3.17)$$

où β_0 et β_1 sont des paramètres à estimer. A la suite de cette régression sur les logits, nous obtenons les coefficients estimés $\hat{\beta}_0 = 1,741$ et $\hat{\beta}_1 = 1,372$ tous deux significatifs pour des erreurs de première espèce supérieures ou égales à 0,1% et 1% respectivement et un R^2 de 0,813, le modèle est globalement significatif pour une erreur supérieure à 0,1%. On peut visualiser cette régression sur la figure 3.5 ci dessous.

Après retour à niveau par la relation qui à x associe $\frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}$, nous obtenons des taux lissés tels que présentés sur la Figure 3.6. Nous observons des taux lissés légèrement inférieurs aux taux CIMA F avant 64 ans environ, ensuite les taux lissés passent au dessus des taux CIMA F, avec un écart d'autant plus marqué qu'on va vers les âges élevés.

1. Sur un plan pratique on peut omettre ici le paramètre terme d'erreur

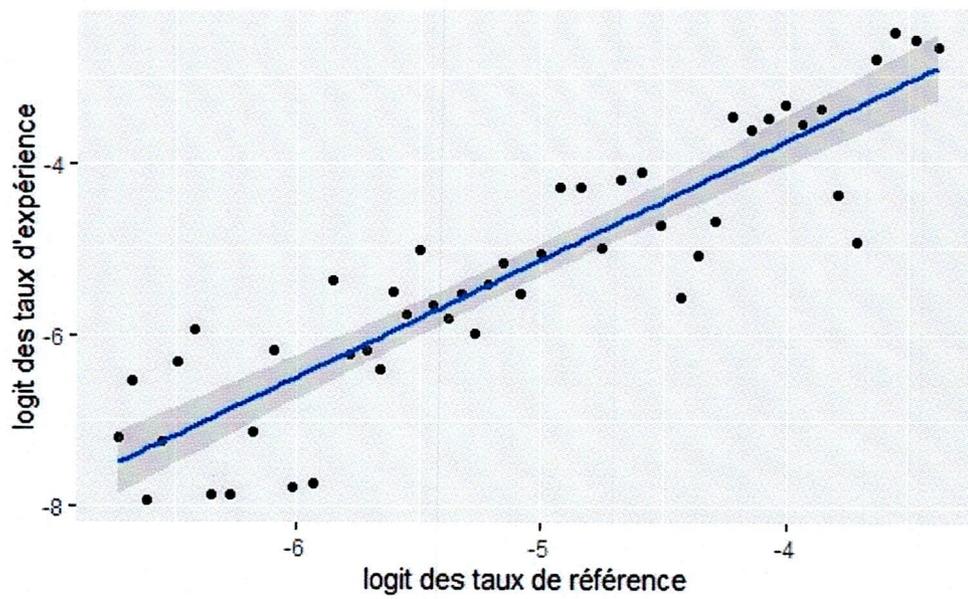


FIGURE 3.5 – Régression sur les logits

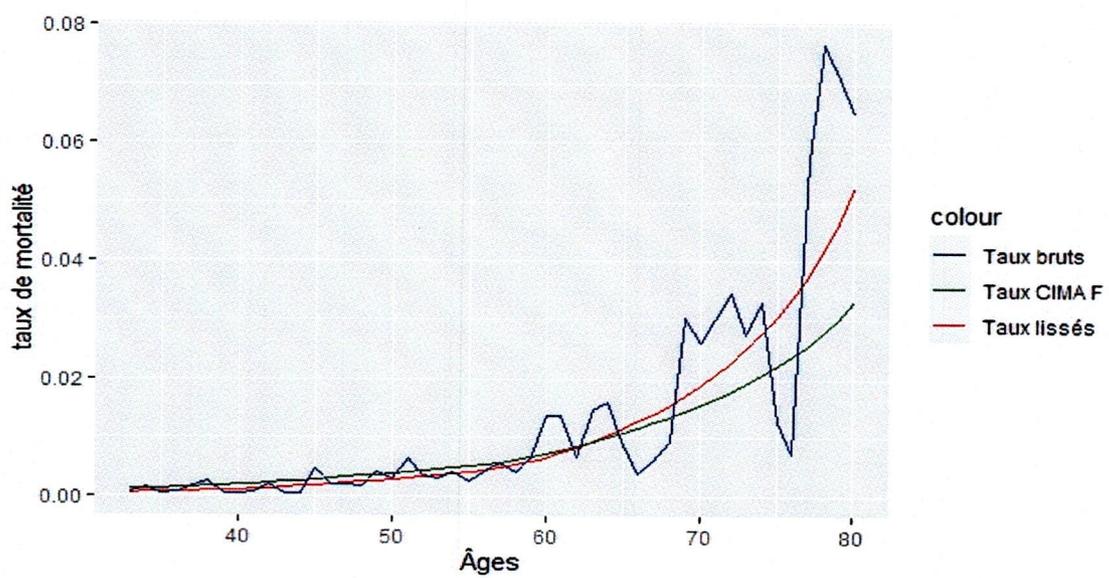


FIGURE 3.6 – Taux lissés, taux bruts et taux CIMA F

3.4 FERMETURE DE LA TABLE

3.4.1 Fermeture à droite

Lors de la construction d'une table de mortalité, les observations faites sur les grands âges lorsqu'il y en a, manquent souvent de fiabilité et présentent une grosse volatilité. Ainsi pour estimer les taux de mortalité à ces âges là, ils existent des modèles appropriés.

Dans notre étude, nous utiliserons le modèle de Coale & Kisker. Ce dernier développé en 1990 postule que :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{65} \exp(k_x \cdot (x - 65)) \quad \text{avec} \quad x \geq 65 \quad (3.18)$$

où k_x est le taux de croissance de la mortalité à l'âge x .

Les auteurs, après avoir examiné différents graphiques relatifs au taux de croissance de la mortalité k_x de 7 pays considérés comme ayant des données de mortalité fiables aux âges élevés (Autriche, ex-Allemagne de l'Ouest, France, Japon, Pays bas, Norvège, Suède) [7] ont constaté que les k_x possédaient en général un pic aux alentours de 80 ans avant de décroître linéairement. ceci les a amené à supposer que :

$$k_x = k_{80} + s \cdot (x - 80) \quad \text{avec} \quad x \geq 80 \quad (3.19)$$

Pour définir le coefficient s relatif à la pente, Coale & Kisker fixent arbitrairement le taux de mortalité pour un âge ultime à 110 ans :

$$\hat{\mu}_{110} = \begin{cases} 1.0 & \text{pour les hommes} \\ 0.8 & \text{pour les femmes} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{110} k_x\right) = \hat{\mu}_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{110} (k_x + s \cdot (x - 80))\right) \quad (3.20)$$

qui donne :

$$s = -\frac{\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{79}}{\hat{\mu}_{110}}\right) + 31k_{80}}{465} \quad (3.21)$$

Les taux de mortalité au-delà de 80 ans sont alors calculés de la manière suivante :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{79} \exp\left(\sum_{y=80}^x (k_{80} + s \cdot (y - 80))\right) \quad x \in \{80, 81, \dots, 109\} \quad (3.22)$$

ou encore :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} \exp(k_{80} + s \cdot (x - 80)) \quad x \in \{80, 81, \dots, 109\} \quad (3.23)$$

Pour notre étude, nous n'avons fait aucune distinction de genre et aussi nous avons dans la base de données des personnes de 107, 108 et 109 ans ainsi nous décidons de prendre comme âge ultime 110 ans avec un taux de décès à 1 uniquement à cet âge là, contrairement à la CIMA F.

La Figure 3.7 donne les résultats obtenus après application de ce modèle à nos données.

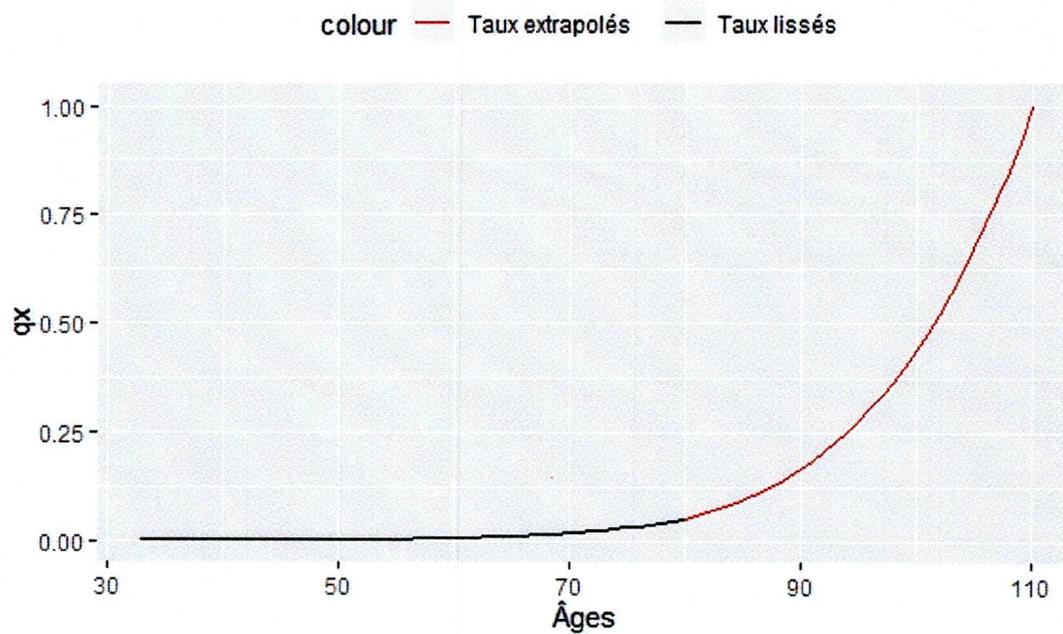


FIGURE 3.7 – Fermeture à droite

3.4.2 Fermeture à gauche

Pour la fermeture à gauche de la table de mortalité, nous optons à nouveau pour une régression des logits en nous appuyant sur les taux de décès de la table CIMA F à ces âges là. La régression précédente sur les logits nous donnais déjà les paramètres $\hat{\beta}_0 = 1,741$ et $\hat{\beta}_1 = 1,372$, la fermeture à gauche de la table ainsi obtenue est présentée sur la Figure 3.8, on y voit avec précision le comportement des taux de décès aux bas âges, un comportement tout à fait cohérent avec la réalité c'est à dire un taux de décès un peu plus élevé pour les nouveaux nés.

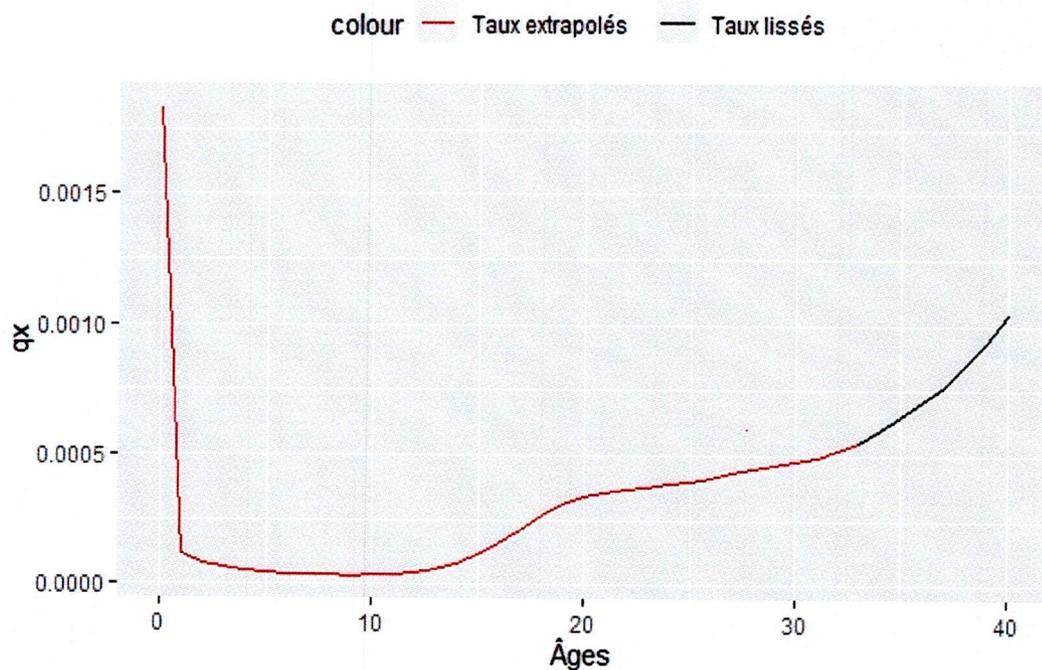


FIGURE 3.8 – Fermeture à gauche

3.4.3 Table de mortalité d'expérience obtenue

Suite à ces opérations de fermeture, la table de mortalité d'expérience obtenue est comparée à la table de référence (CIMA F) dans la Figure 3.9. Cela n'est peut-être pas très visible sur le graphique mais il est à remarquer que les taux de référence sont au dessus des taux d'expérience entre 0 et 63 ans, de 63 ans à 102 ans les taux d'expérience sont clairement au dessus des taux, ce qui semble confirmer les réclamations faites par les adhérents de la CRBC car bien que les taux de référence reprennent le dessus après 102 ans notons que très peu de personnes atteignent cette tranche d'âges.

l'écart que nous pouvons observer entre 102 et 110 ans est certainement accentué par la différence d'hypothèse sur l'âge ultime entre les deux tables.

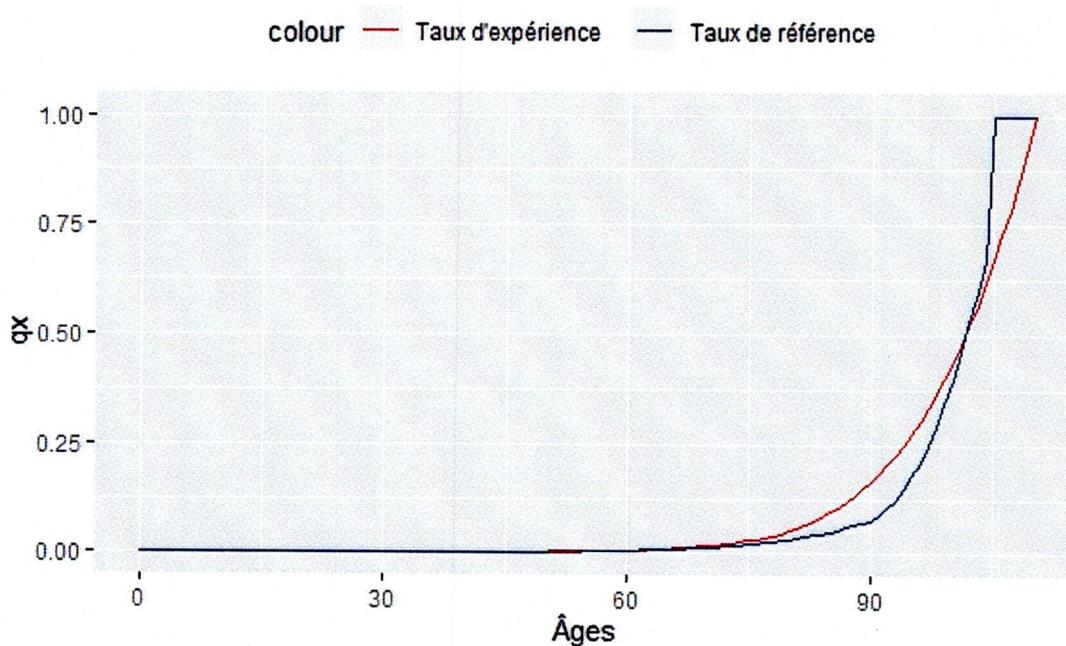


FIGURE 3.9 – Table d'expérience et table de référence

Une fois la table de mortalité construite, nous vérifions ici quelques critères de cohérence sur cette table :

- **Le critère de fidélité** aux taux bruts, il est mesuré à l'aide de la formule 3.24

$$CF = \sum_{x=33}^{80} (q_x^* - \hat{q}_x)^2 \quad (3.24)$$

où q_x^* représente le taux brut à l'âge x et \hat{q}_x le taux lissé correspondant. Plus ce critère est proche de zéro plus les taux lissés sont fidèles aux taux bruts. [8]

Sur la table construite nous obtenons 0,004289 qui est suffisamment proche de zéro.

- **Le critère de régularité** de taux lissés. Il est déterminé par la formule :3.25

$$CR = \sum_{x=0}^{109} (\hat{q}_x - \hat{q}_{x+1})^2 \quad (3.25)$$

Plus cette valeur est proche de zéro et plus le lissage est régulier.

Sur la table de mortalité construite nous obtenons 0,04235 là aussi une valeur très proche de zéro.

3.5 ANALYSE DES IMPACTS QUE CAUSERAIT LA NOUVELLE TABLE DE MORTALITÉ

Dans cette section, nous analysons les impacts que générera la nouvelle table de mortalité. Nous commencerons par l'étude du taux de récupération de l'épargne pour un adhérent de la CRBC, ensuite nous analyserons l'impact sur la tarification et le provisionnement.

3.5.1 Analyse du taux de récupération de l'épargne

Première approche

L'espérance de vie après 60 ans calculée à partir de la table de mortalité d'expérience est de 23,43 ans contre 26,54 pour l'ancienne, ainsi une première approche consiste à faire le rapport entre ces deux valeurs ce qui donne 88,28% , on peut donc dire qu'un retraité de la BEAC ne vit que 88,28% du temps prévu par la table réglementaire, on pourra ce dire qu'en moyenne, c'est cette proportion de son épargne qu'il récupère.

Deuxième approche

Nous considérons dans cette approche un individu moyen entré à la BEAC à 30 ans (L'âge moyen d'entrée à la BEAC est de 29,9 ans nous avons donc pris 30 ans), la cotisation moyenne payée annuellement par les agents de la BEAC est de 2 520 726 FCFA² et la rente annuelle moyenne est de 2 863 248 FCFA³. Ainsi durant ses trente années de carrière notre individu moyen cotisera en tout 75 621 780 FCFA, selon la table de mortalité construite (d'expérience) cette individu vivra 23,43 ans après sa retraite, période pendant laquelle il touchera en moyenne et chaque année 2 862 248 FCFA et donc en moyenne il espère avoir dans sa retraite un cumul de 67 062 470 FCFA. Nous utilisons ici une une formule de calcul du taux de récupération donnée par 3.26 [9], où p représente la pension annuelle perçue, N le nombre d'année pendant lesquelles cette pension est perçue, " c " est la cotisation annuelle versée et M le nombre d'années pendant lesquelles cette cotisation est versée.

$$TR = \frac{\sum_{i=1}^N p}{\sum_{j=1}^M c} = \frac{N \times p}{M \times c} \quad (3.26)$$

Appliquée aux informations sur notre individu moyen, cela revient simplement à faire le rapport entre 67 062 470 et 75 621 780 ce qui donne un taux de récupération de 88,68% qui tend à confirmer le premier taux de récupération calculé dans la première approche.

Le Délai de récupération

Cet indicateur mesure au bout de combien d'années de retraite la totalité des cotisations est récupérée sous forme de pension de retraite. Il est donné par la relation :

$$DR = \frac{\sum_{j=1}^M c}{p} = \frac{M \times c}{p} \quad (3.27)$$

Appliquer ceci à notre individu moyen revient à faire le rapport entre 75 621 780 et 2 863 248, ce qui donne un délai de récupération de 26,41 ce qui une fois de plus est cohérent avec le fait que la tarification soit faite à l'aide de la CIMA F qui prévoit justement une espérance de vie de 26,54 ans après 60 ans.

2. cotisation moyenne annuelle pour un agent de la BEAC, calculée sur la base de l'historique des cotisations.

3. Rente annuelle moyenne pour un retraité de la BEAC, obtenue en faisons la moyenne de toutes les rentes versées.

3.5.2 Analyse des impacts sur la rente

Avant de commencer, nous rappelons quelques paramètres techniques de la CRBC, en effet la CRBC fonctionne selon un système par points et garantit essentiellement une rente viagère différée avec contre-assurance de l'épargne accumulée. Cette rente peut sur demande de l'agent, être réversible, anticipée ou prorogée. La valeur du point est de 2 347 FCFA en 2021 et le taux d'actualisation est de 2,5%. Dans ce régime toutes les cotisations sont aussitôt converties en points et à la retraite, le montant de la rente annuelle est obtenu par multiplication du total de points accumulé avec la valeur d'un point. Le nombre de points gagné chaque année est donné par la relation :

$$Pts = \frac{Pr}{V^{60-x} \times a_{60}^{(12)} \times VP \times (1 + \theta)} \quad (3.28)$$

où :

- Pr est le montant de la prime pure annuelle.
- V est le facteur d'actualisation $\frac{1}{1+2,5\%}$.
- VP est la valeur du point.
- θ est le taux de chargement sur rente, il est de 4%.
- x est l'âge arrondi de l'agent.
- $a_{60}^{(12)}$ est le capital constitutif à terme échu et taux technique 2,5% d'une rente viagère d'1 FCFA à 60 ans, c'est le seul paramètre qui comprend des probabilités viagères puisque la prime pure Pr est déjà donnée par la relation 3.30, c'est donc sur lui que se répercute la modification de la table de mortalité.

Nous considérons une rente annuelle à terme échu, nous déterminerons la variation du nombre total de points à la retraite pour notre individu moyen en fonction des deux tables de mortalité.

Avec la table de mortalité d'expérience

Nous avons :

$$a_{60}^* = \sum_{k=1}^{50} V^k \times {}_k p_{60}^* \quad (3.29)$$

Où ${}_k p_{60}^*$ représente la probabilité viagère calculée à partir de la table de mortalité d'expérience et a_{60}^* le capital constitutif à terme échu correspondant. Et l'expression 3.30 donne la relation entre la prime pure et la cotisation versée.

$$Cotisation = \frac{Pr}{1 - g} \quad (3.30)$$

g étant le chargement de gestion qui est de 4%.

Reprenons notre individu moyen avec sa cotisation annuelle de 2 520 726 FCFA, une application de la formule 3.30 nous donne une prime pure de 2 419 897 FCFA nous obtenons aussi $a_{60}^* = 16,4$ ainsi que :

$$V^{60-30} = \frac{1}{(1 + 2,5\%)^{30}} = 0,47674$$

ce qui donne :

$$Pts^* = \frac{2419897}{0,47674 \times 16,4 \times 2347 \times 1,04} = 127$$

Et au bout des trente années de carrière on obtient : 3810 pts.

Avec la table de mortalité règlementaire

Ici nous avons juste besoin de calculer le capital constitutif à terme échu d'une rente viagère d'1 FCFA à 60 ans par la table de mortalité règlementaire $a_{60} = 17,93$ ensuite nous faisons le reste du calcul et nous obtenons. $Pts = 116$ et un cumulé de 3 480 points en carrière.

Ainsi l'impact sur le nombre moyen de points acquis en carrière est matérialisé par un différentiel de 330 pts en faveur de la table de mortalité d'expérience, et en multipliant par la valeur d'un point, on peut aussitôt dire qu'en moyenne les rentes annuelles augmenteraient de 774 510 FCFA si on passait à la table de mortalité d'expérience, soit une augmentation relative de 9,48%.

Afin de mesurer l'impact sur la prime pure, il suffit de partir de la relation 3.28 et on obtient :

$$Pr^* = V^{60-x} \times a_{60}^* \times Pts \times VP \times (1 + \theta) \quad (3.31)$$

Où Pr^* représente la prime pure obtenue à l'aide de la table d'expérience. Après application numérique nous avons une prime pure annuelle égale à 2 213 757 FCFA, c'est à dire que si on veut conserver autant de points qu'avec la table CIMA F (3480 Pts) on paye une prime pure annuelle inférieure de 206 140 FCFA, soit une diminution de 8,5%.

3.5.3 Analyse des impacts sur les provisions mathématiques

Comme nous l'avons déjà dit les droits à la CRBC sont exprimés en points contre assurés, il est donc normale que les provisions soient calculées en fonction des points, la provision mathématiques à constituer lorsque l'adhérent a l'âge x est donnée par la relation :

$$PM_x = Pts \times VP \times (1 + \theta) \times a_{60}^{3\%} \times V^{60-x} \quad (3.32)$$

Où $a_{60}^{3\%}$ est le capital constitutif d'une rente annuelle d'1 FCFA versée à terme échu à partir de 60 ans avec comme taux technique 3%.

Après application numérique nous obtenons comme provision sachant que notre individu moyen a trente ans : $PM_{30}^* = 1\,979\,540$ FCFA pour la table de mortalité d'expérience et $PM_{30} = 1\,963\,229$ FCFA pour la table de mortalité réglementaire. Soit une augmentation de la provision la première année de 0,83%.

3.5.4 Généralisation de l'étude

De façon générale les différents gaps observés sur les rentes, la tarification et le provisionnement sont causés par la modification du facteur d'escompte viager noté ${}_nE_x$ qui est l'engagement de verser une unité monétaire à l'époque n si l'assuré atteint l'âge $x + n$, il est donné par la formule :

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \times V^n \quad (3.33)$$

Où l_x est l'effectif vivant à l'âge x et l_{x+n} l'effectif vivant à l'âge $x + n$, V le facteur d'actualisation. La Figure 3.10 ci dessous nous donne les évolutions comparées de ce facteur d'escompte sur les deux tables de mortalité en fonction de la période. La figure 3.11 plus bas donne l'évolution de la différence des facteurs d'escompte CIMAF et Tab_CRBC, cette figure permet de voir que les facteurs d'escompte CIMAF sont supérieurs aux facteurs d'escompte Tab_CRBC sur la grande majorité des périodes, ce qui traduit encore le fait que la CIMAF prévoit que l'engagement pris devra être payé avec une plus grande probabilité.

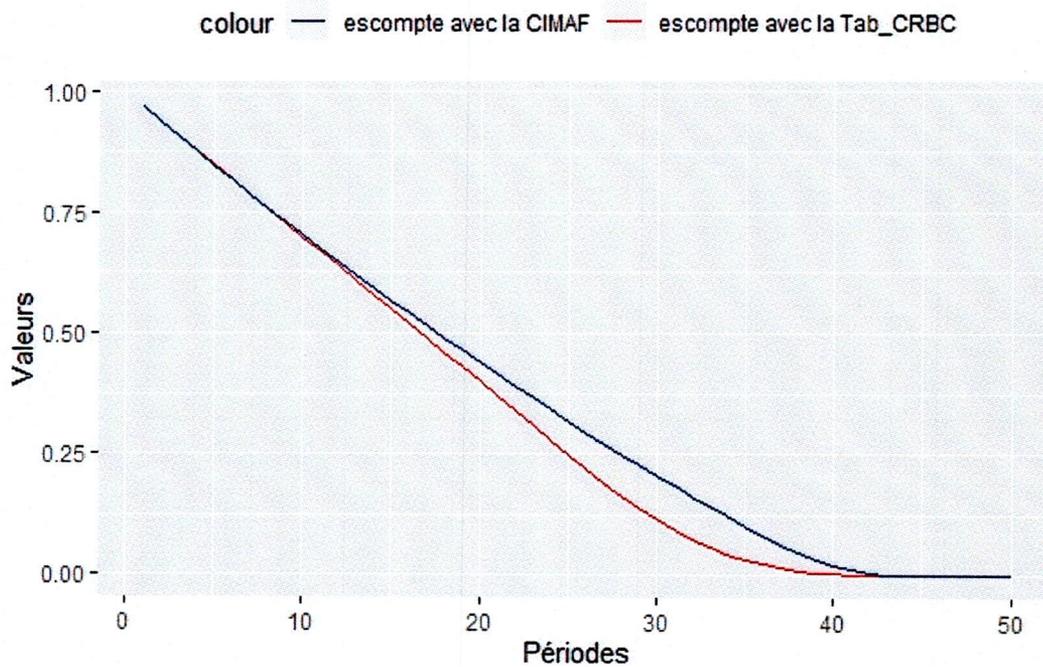


FIGURE 3.10 – Facteurs d’escompte calculés à partir des deux table de mortalité

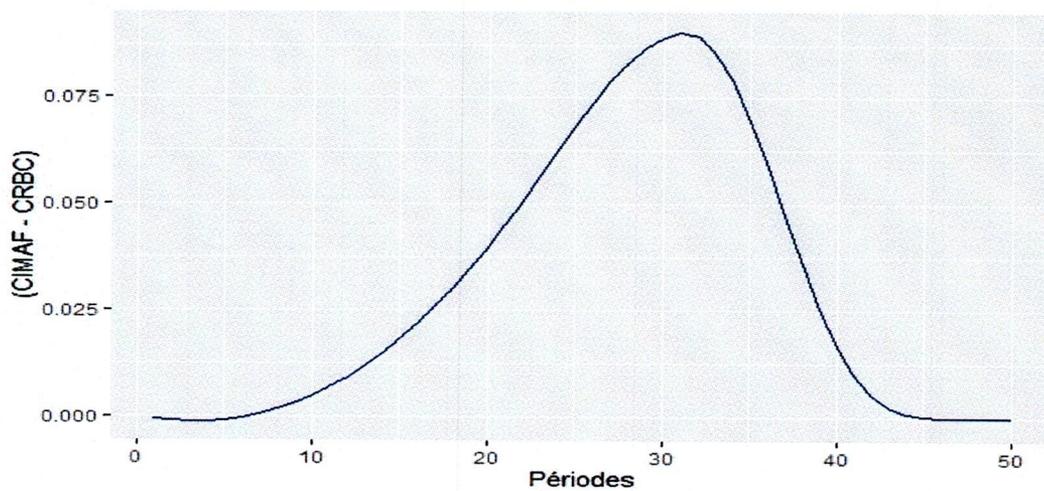


FIGURE 3.11 – Différence entre les facteurs d’escompte issus des deux tables de mortalité

3.5.5 Approche prospective

La mortalité est un phénomène en perpétuel mutation, on devrait donc logiquement s'attendre à observer une variation structurelle de la mortalité sur une période de 25 ans par exemple. En effet des études [10] ont démontré l'existence d'une tendance mondiale à l'allongement de la vie. Dans notre cas (CRBC) la garantie porte sur une rente viagère donc un engagement qui s'étale sur plusieurs années, il est ainsi évident que l'outil le plus pertinent pour une caisse de retraite serait une table de mortalité prospective qui est un document statistique donnant les taux de mortalité par âge et par année permettant de mieux saisir les modifications temporelles de la mortalité dans le calcul des provisions et la tarification. Dans notre cas le faible nombre de données ne nous permettait pas de construire une table de mortalité prospective. Comme on peut le voir sur les graphiques suivants : 3.12, 3.13 et 3.14 représentant la répartition des décès par âge pour les années 1999, 2005 et 2015. On peut y voir qu'il est presque impossible d'étudier la mortalité par année vu le nombre trop important d'âges sans décès observés.

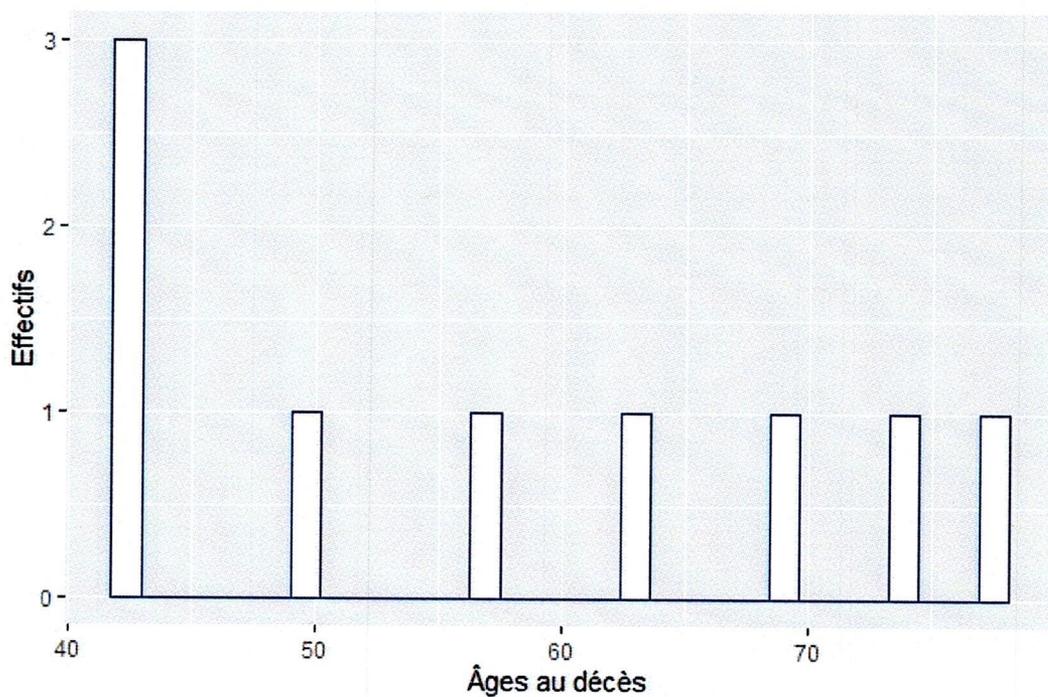


FIGURE 3.12 – Décès observés au cours de l'année 1999 par âge

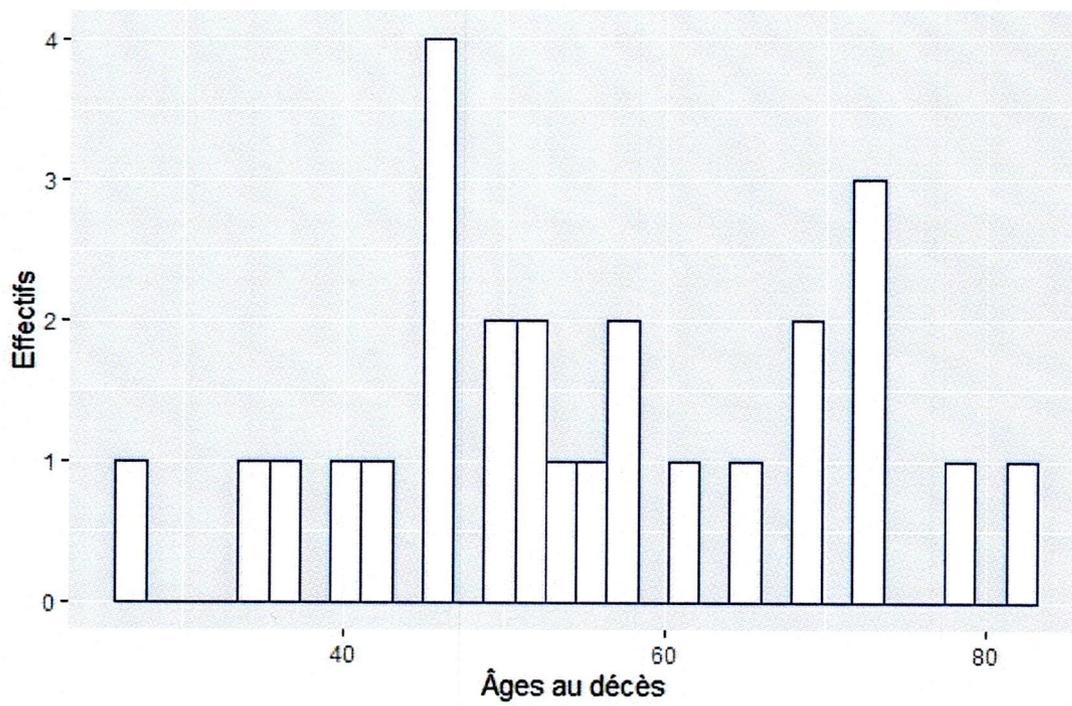


FIGURE 3.13 – Décès observés au cours de l'année 2005 par âge

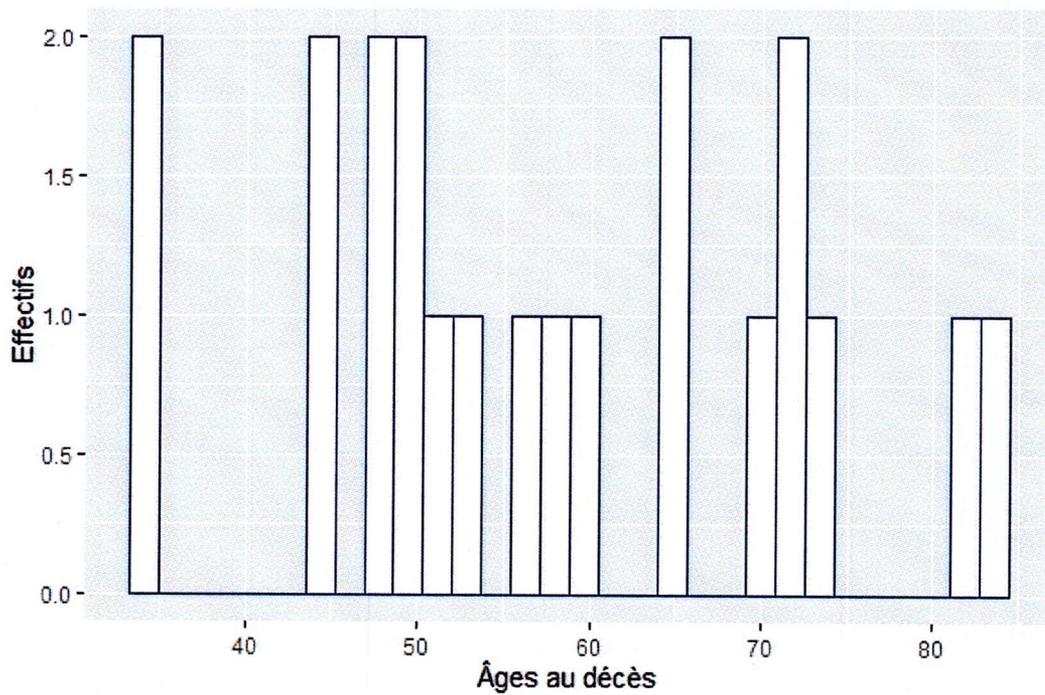


FIGURE 3.14 – Décès observés au cours de l'année 2015 par âge

CONCLUSION

Dans le processus de construction d'une table de mortalité d'expérience, la constitution d'une base de données fiable et représentative est une étape cruciale, c'est pourquoi nous avons passé la majeure partie de notre temps sur les données. Une étude préalable de la base de données a permis d'apporter des réponses à certaines des questions qui ont motivé ce mémoire. Pour l'estimation des taux bruts de décès, nous avons retenu comme méthodes les estimateurs de Hoem et Kaplan-Meier, face à la grande similitude des résultats obtenus avec les deux méthodes, nous avons fait le choix de continuer avec les taux bruts calculés avec la méthode de Hoem puisque de toutes les façons les résultats seront strictement les mêmes avec les taux de Kaplan-Meier. Pour le lissage, faisant face à un très petit nombre de données, nous avons choisi le modèle de Brass par la régression des "logits" à partir de la table de mortalité de référence déjà utilisée à la CRBC (la CIMA F), ce même modèle nous a permis de procéder à la fermeture gauche de la table de mortalité. la fermeture droite quant à elle a été effectuée à l'aide du modèle de Coale & Kisker car cette méthode permettait de choisir un âge ultime qui correspondait à nos données. La construction de la table de mortalité terminée, nous avons procédé à l'analyse des impacts qu'aurait une telle table de mortalité.

Au terme de ce travail, bien que nous ayons tenter de répondre à chacune des problématiques qui ont initié ce mémoire, nous devons néanmoins souligner son caractère perfectible. En effet, le faible nombre de données nous a contraint à faire une table de mortalité du moment alors que pour une caisse de retraite, une table de mortalité prospective est plus indiquée, toujours du fait du faible nombre de données, nous avons dû considérer une fenêtre d'observation relativement longue, nous exposant à une tendance temporelle de la mortalité dans les estimations, pour cette même raison nous avons été obligé à construire une table de mortalité unisexe⁴. Le temps imparti ne nous permettait pas toujours d'appliquer plusieurs méthodes afin de comparer les résultats, par exemple, on aurait pu faire aussi un lissage paramétrique, nous avons dû nous contenter des tests de significativité des

4. Ne tenant pas compte du genre

coefficients et test de significativité globale, ainsi que le R^2 élevé, alors qu'il aurait été mieux de faire des tests plus sophistiqués.

Les principales difficultés que nous avons rencontrées dans ce travail étaient dans le traitement des données, il faut dire que le modèle d'enregistrement des informations adopté à la CRBC favorise certainement l'introduction d'erreurs, c'est ainsi que nous avons été contraint de supprimer des données précieuses mais malheureusement inutilisables. Pour pallier à ce problème, nous proposons à la CRBC comme outil d'enregistrement des informations, un "userform" qui permet en fait de constituer un premier niveau de contrôle sur les données et ainsi éviter d'enregistrer des informations erronées.

Afin d'améliorer le présent travail, il faudrait premièrement plus de temps permettant d'apporter des justifications plus rigoureuses à certains résultats et de mieux mettre en valeur l'ensemble des résultats obtenus, une amélioration de la méthode d'enregistrement des informations permettrait aussi dans quelques années d'avoir assez de données fiables pour la construction d'une table de mortalité prospective pour une meilleure estimation du risque couvert.

Bibliographie

- [1] Delwarde & Denuit, *Construction de tables de mortalité périodique et prospectives*. Economica, 2006.
- [2] Tomas & Planchet (Article), *Construire une table de mortalité prospective*. Laboratoire SAF, 2014.
- [3] Bureau du surintendant des institutions financières Canada (Etude actuarielle), *Programme de la sécurité de la vieillesse*. 2014
- [4] Insee, *Les systèmes de retraite en Europe*. 2004
- [5] Bastien Laizet (mémoire), *Apport de la théorie de la crédibilité à l'estimation de la mortalité*. EURIA, 2018.
- [6] Loïc Desquilbet, (cours), *Introduction à l'analyse de survie*. ENVA, 2021.
- [7] Quashie & Denuit, (Article), *Modèle d'extrapolation de la mortalité aux grands âges*. ACTU Working Paper, 2005.
- [8] Optimind, (Dossier technique), *Les tables de mortalité*, 2007.
- [9] FinACTU, (Article), *Les régimes de retraite en Afrique, à l'épreuve du vieillissement démographique*. 2018.
- [10] Nguéyap Ferdinand, (Article), *Vitesse d'allongement de la vie, cause de décès en Afrique et en Asie et disparités entre villes et campagne*. Actes du colloque de Sinaia, 1998.
- [11] Manon Dal Pont, (Mémoire), *Construction d'une table de mortalité d'expérience en assurance emprunteur*. ISFA.
- [12] Tchouonla N. Ronald, (Mémoire), *Construction des tables de mortalité d'expérience et impact sur la rentabilité des produits de la zone CIMA : cas d'un assureur de la zone*. Université des Montagnes, 2018.
- [13] Kamega Aymric, (Cours), *Modèle de durée théorie et pratique : partie 1*. Institut International des Assurances, 2021.
- [14] Kamega & Planchet (Article), *Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience*. ISFA, 2010.