

**INSTITUT INTERNATIONAL DES
ASSURANCES**

(IIA)



**INSTITUT DE SCIENCE
FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES**

(ISFA)



**MODÉLISATION DE LA SINISTRALITÉ, COTATION ET
OPTIMISATION DE LA RÉASSURANCE EN ASSURANCE DE
RESPONSABILITÉ CIVILE AUTOMOBILE**

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de
l'obtention d'un Master
en Actuariat

PAR
NJEUNKAM Joel

SOUS L' ENCADREMENT DE :

Mme Bibiane Francine MBIA

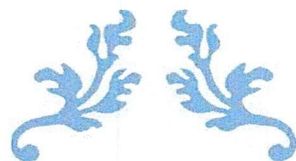
*Responsable Département
Souscription et réassurance*

Pr. FOTSO Siméon

*Maitre de Conférences,
Université de Yaoundé 1*



SEPTEMBRE 2021



MODÉLISATION DE LA SINISTRALITÉ, COTATION ET OPTIMISATION DE LA RÉASSURANCE EN ASSURANCE DE RESPONSABILITÉ CIVILE AUTOMOBILE

Mémoire de fin de formation



**SEPTEMBRE 2021
PAR : NJEUNKAM JOEL**

Remerciements

Ce travail est la résultante du soutien, de l'assistance et de la collaboration de plusieurs personnes auxquelles je tiens à exprimer ma profonde gratitude. Il s'agit de :

- Mme Bibiane Francine MBIA, Mme Celanie NOUIND, M. Ariel MANHOULI pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont accordé, leurs encadrements, conseils et encouragements ;
- M. FOTSO Siméon pour son encadrement et son encouragement ;
- Mme TCHAKOUNTE Kévine pour sa disponibilité et son encadrement ;
- Tout le personnel du département souscription et réassurance de SUNU pour son accueil et sa convivialité, qui ont favorisé un cadre agréable et propice à la recherche ;
- Tout le corps enseignant de l' IIA et de l' ISFA pour les connaissances qu'ils m'ont inculquées tout au long de ma formation ;
- Tous ceux qui de près ou de loin m'ont soutenue tout au long de ce projet de mémoire.

Merci à tous.

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	7
Abstract	1
Liste des abréviations	2
Liste des figures	3
Liste des tableaux	4
Introduction	5
0.1 Contexte et justification de l'étude	5
0.2 Problématique	5
0.3 Objectifs	6
0.4 Plan de travail	6
1 GÉNÉRALITÉS	7
1.1 Réglementation CIMA	7
1.1.1 Raisons et buts d'une réglementation des assurances	7
1.1.2 CIMA	8
1.2 Risque de souscription non vie	9
1.2.1 Présentation	9
1.2.2 Les mesures de risque	9
1.3 Généralités sur la réassurance	11
1.3.1 Définition de la réassurance	12
1.3.2 Intérêt de la réassurance pour l'assureur	12
1.3.3 La réglementation CIMA sur l'activité de réassurance	12

1.3.4	Critères de classification de la réassurance	13
1.4	La cédante et son programme de réassurance	19
1.4.1	Ses produits commercialisés	19
1.4.2	Son programme de réassurance en place	20
2	STATISTIQUE DESCRIPTIVE ET RETRAITEMENT DES DONNÉES	21
2.1	Description de la base de données	21
2.2	Statistique descriptive	22
2.3	Mise en as-if	22
2.3.1	Méthodologie	23
2.3.2	Indice utilisé	23
2.3.3	Projection de l'indice	23
2.3.4	Résultats et impact de la mise en as-if	24
2.4	Mise à l'ultime	25
2.4.1	Présentation de la Méthode de Chain Ladder Standard	25
2.4.2	Validation de l'hypothèse de la Méthode de Chain Ladder	25
2.4.3	Résultats de la projection à l'ultime	27
3	ÉTUDE DU SEUIL DE SINISTRE GRAVE	28
3.1	Rappels sur la théorie des valeurs extrêmes	28
3.1.1	Distribution du maximum	28
3.1.2	Excès au-dessus d'un seuil	30
3.2	Estimation de l'indice de queue	32
3.2.1	Estimation par maximum de vraisemblance	32
3.2.2	Estimateur de Hill	33
3.3	Méthodes de détermination du seuil de sinistre grave	33
3.3.1	Le graphique des dépassements moyens ou Mean Excess Plot	33
3.3.2	AMSE (Asymptotic Mean Square Error)	34
3.4	Application aux données	34
3.4.1	Quelques statistiques descriptives	34
3.4.2	Détermination du domaine d'attraction	35
3.4.3	Détermination du seuil de sinistre grave	36
4	MODÉLISATION DE LA SINISTRALITÉ	38

TABLE DES MATIÈRES

4.1	Définition du modèle : Le modèle collectif	38
4.2	Tests d'adéquation à une loi	39
4.2.1	Estimation des paramètres de la loi	39
4.2.2	Test de Kolmogorov-Smirnov	40
4.2.3	Test d'Anderson-Darling	41
4.3	Modélisation	41
4.3.1	Lois utilisées	41
4.3.2	Modélisation de la sinistralité attritionnelle	42
4.3.3	Modélisation de la sinistralité grave	44
4.4	Démarche de simulation de la charge sinistre totale	46
5	COTATION ET OPTIMISATION DE LA RÉASSURANCE	47
5.1	Critères d'optimisation	47
5.2	Cotation des traités XS : Détermination de $P_{cédée}$	49
5.2.1	La méthode de Burning Cost	49
5.2.2	La méthode Probabiliste	50
5.2.3	Tarification par simulation	50
5.2.4	Application	51
5.3	Optimisation du coût de la réassurance	51
5.4	Optimisation des indicateurs	53
5.4.1	Impact de la rétention et de la portée	53
5.4.2	Programmes optimaux et résultats	55
	Limites de l'étude	58
	Conclusion	59
	Références Bibliographiques	60
	Annexes	61

Résumé

Mots-clés : Réassurance, modélisation, cotation, optimisation, excédent de sinistre, théorie des valeurs extrêmes.

La réassurance, qui permet le transfert des risques financiers d'une entité appelée cédante à une autre appelée cessionnaire est indispensable pour le bon fonctionnement d'une compagnie d'assurance. Ce transfert de risques entraîne la cession d'une partie de son résultat.

L'objectif de ce mémoire est de calibrer la sinistralité du portefeuille de responsabilité civile automobile d'une société d'assurance non vie et de piloter la gestion de la réassurance.

Il s'agira d'abord de modéliser la sinistralité annuelle de la branche d'étude. Cette sinistralité est modélisée en séparant les sinistres attritionnels qui sont les sinistres de forte fréquence et de montant faible et la sinistralité grave qui correspond aux sinistres de faible fréquence et de montant élevé. A cet effet, la théorie des valeurs extrêmes sera appliquée afin de déterminer le seuil à partir duquel un sinistre pourra être qualifié de grave.

Après la modélisation de la sinistralité, la gestion de la réassurance portera sur la réassurance non-proportionnelle, plus précisément les traités en excédent de sinistre qui sont des traités tels que le réassureur prend en charge une partie du montant des sinistres dépassant un seuil appelé priorité dans la limite d'un montant appelé portée. L'étude d'un tel programme de réassurance nécessite d'abord de le coter, c'est-à-dire de trouver la prime pure de réassurance. Elle sera obtenue par des simulations de Monte-Carlo.

La stratégie de réassurance en place sera étudiée dans le but de savoir si elle est adaptée à la sinistralité de la cédante. Une stratégie optimale doit trouver le juste milieu entre cession de résultat et diminution du risque, et dépendra de son impact sur les indicateurs comme la volatilité. Nous avons donc optimisé le traité excédent de sinistre par le critère espérance-volatilité en construisant des graphiques où chaque point correspond à un plan de réassurance XS. La frontière d'efficience permet de sélectionner le programme correspondant à l'objectif établi dans le plan stratégique. Ainsi en fonction de son appétence au risque, la cédante a à sa disposition un traité XS (Priorité et Portée) lui donnant un résultat espéré maximal.

Abstract

Key words : Reinsurance, modeling, Reinsurance Pricing, optimization, excess of loss, extreme value theory.

Reinsurance, which allows the transfer of financial risks from one entity called cedant to another called assignee, is essential for the proper functioning of an insurance company. This transfer of risks entails the transfer of part of its income.

The objective of this thesis is to calibrate the loss experience of the automobile liability portfolio of a non-life insurance company and to steer the management of reinsurance.

The first step will be to model the annual loss experience of the study branch. This loss experience is modeled by separating attritional claims, which are high frequency claims of low amounts, and serious claims, which correspond to low frequency claims and high amounts. To this end, the theory of extreme values will be applied in order to determine the threshold from which a loss can be qualified as serious.

After modeling the loss experience, reinsurance management will focus on non-proportional reinsurance, more specifically excess loss treaties which are treaties such that the reinsurer takes charge of part of the amount of claims exceeding a threshold called priority. within the limit of an amount called scope. The study of such a reinsurance program requires first to rate it, that is, to find the pure reinsurance premium. It will be obtained by Monte-Carlo simulations.

The reinsurance strategy in place will be studied with the aim of knowing whether it is adapted to the claims experience of the ceding company. An optimal strategy must strike the right balance between disposing of profit and reducing risk, and will depend on its impact on indicators such as volatility. We have therefore optimized the excess loss treaty by the expectation-volatility criterion by constructing graphs where each point corresponds to an XS reinsurance plan. The efficiency frontier makes it possible to select the program corresponding to the objective established in the strategic plan. Thus, depending on its risk appetite, the ceding company has at its disposal an XS treaty (Priority and Scope) giving it a maximum expected result.

Liste des abréviations

- **CIMA** : Conférence Interafricaine des Marchés d'Assurance
- **CRCA** : Commission Régionale de Contrôle des Assurances
- **DNA** : Directions Nationales des Assurances
- **VaR** : Value at Risk
- **TVaR** : Tail Value at Risk
- **QP** : Quote Part
- **EDP** : Excédent de plein
- **XS** : Excédent de sinistre
- **AAD** : Clause de franchise annuelle
- **AAL** : Limite d'intervention maximale
- **IPC** : Indice des Prix à la Consommation
- **GEV** : Valeurs extrêmes généralisées
- **GPD** : Distributions de Pareto généralisées
- **AMSE** : Erreur quadratique moyenne asymptotique
- **AIC** : Critère d'information d'Akaike
- **BIC** : Critère d'information bayésien
- **iid** : Indépendants et identiquement distribués

Table des figures

1.1	Illustration du mécanisme du traité QP	14
1.2	Exemple d'un traité en Quote-part	15
1.3	Exemple d'un traité en Excédent de plein	16
2.1	Description des variables de la base de données traitée	21
2.2	Projection de l'indice	24
2.3	CC-plots pour la validation de l'hypothèse de Chain Ladder	26
3.1	Coûts individuels des sinistres en K.FCFA	35
3.2	Test sur le paramètre de queue	35
3.3	Mean excess plot (coûts en K.FCFA)	36
3.4	Validation du seuil de sinistre grave	37
4.1	Ajustement loi de la sévérité grave	45
5.1	Illustration de la frontière efficiente	48
5.2	Cotation du traité XS	51
5.3	Comparaison de la charge de sinistre avant et après réassurance sur le traité XS pool	52
5.4	Comparaison de la charge de sinistre avant et après réassurance sur les trois traités XS	53
5.5	Nuage de points espérance/écart type du résultat avec les programmes testés . .	55
5.6	Nuage de points espérance/volatilité du résultat avec les programmes testés . . .	56

Liste des tableaux

1.1	Structure de réassurance en place (RC Auto)	20
2.1	Quelques statistiques du coût des sinistres	22
2.2	Quelques statistiques du coût des sinistres	22
2.3	Impact de la mise en as-if	24
2.4	d-triangle pour la validation de l'hypothèse de Chain Ladder	26
2.5	Facteurs de developpement de Chain ladder	27
2.6	Résultats de la mise à l 'ultime	27
3.1	Quelques statistiques des sinistres corrigés	34
4.1	Estimation des paramètres des lois théoriques des coûts des sinistres attritionnels	42
4.2	Tests d'adéquation	43
4.3	Estimation des paramètres de la loi du nombre de sinistres attritionnels	43
4.4	Estimation des paramètres des lois théoriques des coûts des sinistres graves	44
4.5	Tests d'adéquation	44
4.6	Estimation des paramètres de la loi du nombre de sinistres graves	45
5.1	Structure de réassurance en place (RC Auto)	51
5.2	VaR avant et après réassurance XS pool (en milliers)	52
5.3	Quelques indicateurs obtenus avec la réassurance actuelle	53
5.4	Impact d'une variation de la rétention sur les indicateurs	54
5.5	Impact d'une variation de la portée sur les indicateurs	54
5.6	Exemple d'un plan optimal	57

Introduction

0.1 Contexte et justification de l'étude

La particularité du domaine de l'assurance est son cycle inverse de production ; en effet, l'assureur reçoit des primes pour protéger ses clients contre des événements préjudiciables dont il ne connaît pas le prix de revient. Pour ne pas porter sur lui tout seul cette incertitude, l'assureur peut faire recours à des réassureurs qui l'aideront à supporter le risque/incertitude : on parle de diminution de l'exposition au risque et ou de transfert de risque.

L'assureur transfère une partie des primes reçues au réassureur, qui lui en retour indemnise la cédante en cas de survenance des sinistres selon les clauses du traité de réassurance mis en place entre les deux parties.

Du fait que la réassurance a un coût pour la cédante, celle-ci doit choisir des structures de réassurances qui soient en adéquation avec son expérience de sinistralité, son exposition au risque, sa stratégie de souscription, ses objectifs stratégiques et sa stratégie de réassurance.

SUNU Assurances non vie Cameroun, société d'assurances principalement basée sur l'assurance de biens et de responsabilité, inscrit sa stratégie dans une optique d'optimisation de sa structure réassurance.

Nous nous intéresserons dans ce travail au périmètre responsabilité civile automobile qui est le périmètre le plus important de la société (41 % du chiffre d'affaires).

Dans un processus de modélisation de la sinistralité et d'optimisation de la réassurance de la cédante, nous nous intéresserons dans ce travail à la sinistralité du périmètre de la garantie responsabilité civile automobile. Il s'agira tout d'abord de modéliser la sinistralité de la cédante en séparant la sinistralité attritionnelle de celle grave en prenant en compte l'incertitude sur le nombre de sinistres et celle relative au coût des sinistres survenus et ensuite d'optimiser la réassurance .

0.2 Problématique

La réassurance ne sera pertinente pour la cédante que si les traités souscrits sont en adéquation avec son expérience de sinistralité, son exposition au risque et ses objectifs stratégiques. Il est alors nécessaire de résoudre la problématique suivante :

La structure de réassurance en place est-elle adaptée à l'historique de la sinistralité de la cédante et lui permet-elle d'atteindre ses objectifs ?

0.3 Objectifs

L'objectif de ce travail est de « **modéliser la sinistralité, coter et optimiser la réassurance de la cédante en ce qui concerne l'assurance de responsabilité civile automobile** ». De manière spécifique, il s'agira de :

- Retraiter les données historiques de sinistres : mise en as-if et à l'ultime ;
- Déterminer le seuil qui sépare la sinistralité attritionnelle de la sinistralité grave ;
- Modéliser les sinistralités attritionnelle et grave ;
- Etudier les quantiles extrêmes avant et après réassurance.
- Etudier quelques indicateurs de rentabilité et de risque pour proposer si nécessaire une structure de réassurance plus adaptée.

0.4 Plan de travail

Notre travail s'articule autour de 5 chapitres répartis comme suit : le premier chapitre pose les bases de la réglementation CIMA et les concepts en réassurance ; le deuxième chapitre quant à lui, concerne les traitements effectués sur les données de sinistres à savoir les retraitements de l'inflation et la projection à l'ultime. Une étude pour distinguer la sinistralité attritionnelle de la sinistralité grave sera faite au chapitre 3. Nous allons ensuite modéliser les deux types de sinistralité au chapitre 4. Il ne restera plus qu'à proposer une optimisation de la politique de réassurance de notre cédante au chapitre 5.

GÉNÉRALITÉS

1.1 Réglementation CIMA

1.1.1 Raisons et buts d'une réglementation des assurances

L'institution d'une réglementation propre aux entreprises d'assurances tient essentiellement à la spécificité même de l'assurance. Le droit commun assure certes une protection aux divers intérêts qui peuvent se trouver en présence dans le domaine de l'assurance, mais les règles qu'il impose ne sont cependant pas appropriées à la technique mise en œuvre en assurance. Comme cette technique offre au bénéfice des assurés, une protection différente de celle du droit commun, il a donc fallu assujettir les entreprises d'assurances à une réglementation spécifique.

Les diverses finalités qui ont été assignées à la réglementation des entreprises d'assurances tendent à protéger les assurés et bénéficiaires de contrats contre les dangers auxquels ceux-ci sont exposés.

1.1.1.1 Les dangers encourus par les assurés et bénéficiaires des contrats d'assurance

L'assurance présente une particularité dite « inversion du cycle de production ». En effet, contrairement au cycle de production habituel, en assurance, les primes d'assurances sont payées d'avance alors que le service promis par l'assureur n'est rendu qu'ultérieurement. De ce fait, il fallait donc préserver les assurés de deux dangers :

- D'une part, veiller à ce que les primes qu'ils payent d'avance ne soient détournées de leur destination normale c'est-à-dire le paiement des sinistres ;
- D'autre part, éviter que les tarifs ne soient pas fixés à un niveau insuffisant.

1.1.1.2 contrôle des contrats d'assurance

La position d'infériorité dans laquelle se trouve l'assuré par rapport à l'assureur aussi bien en matière juridique qu'en matière financière, a conduit à soumettre le contrat d'assurance, contrat dit d'adhésion à une réglementation spéciale. Encore faut-il, pour que la protection des assurés et bénéficiaires de contrat soit réelle, que cette réglementation spéciale soit respectée, c'est-à-dire que les contrats d'assurances soient conformes aux dispositions de cette réglementation.

Dans cette perspective, l'Etat qui doit faire respecter la loi, aurait pu se borner à laisser le pouvoir judiciaire sanctionner d'éventuelles irrégularités tenant soit à la rédaction des contrats,

soit à leur application. Cette solution n'aurait cependant pas été satisfaisante dans la mesure où elle suppose une plainte de la victime contre l'irrégularité, victime qui serait ainsi demeurée en position d'infériorité par rapport à l'assureur, ne serait-ce qu'en raison de sa méconnaissance du fonctionnement de l'appareil judiciaire. C'est pourquoi, a été retenue une solution différente : un organe administratif, chargé de surveiller les contrats d'assurances (non pas naturellement dans l'application qui en est faite, qui relève exclusivement du juge, mais dans leur contenu) et de redresser ceux qui ne respectent pas le Code des Assurances. Le contrôle ainsi exercé ne se limite pas aux contrats mais s'applique à tous les documents destinés à être distribués au public.

1.1.1.3 Contrôle de la solvabilité des entreprises d'assurances

Comme les assureurs déterminent leurs tarifs avant de connaître le prix de revient de leurs prestations, ils risquent de voir les prévisions de dépenses dépassées. C'est pourquoi, la réglementation soumet les entreprises d'assurances à des mesures destinées à garantir constamment leur solvabilité. C'est à dire à les mettre toujours à même de faire face à leurs engagements à l'égard des assurés et bénéficiaires des contrats et étant en mesure de leur verser le moment venu les sommes qui leur sont dues.

L'originalité de la réglementation dans ce domaine réside dans le fait qu'elle tend à prévenir les faillites des entreprises d'assurances en plaçant celles-ci sous le contrôle d'entités dotées de pouvoir de coercition. Ce contrôle qui s'exerce dès la naissance des entreprises d'assurances, se poursuit ainsi pendant toute la durée de leurs activités et même à la liquidation de chaque société.

1.1.2 CIMA

A partir du milieu des années 1990 plusieurs études et projets qui ont été élaborés ont abouti à la signature le 10 juillet 1992 à Yaoundé du traité instituant une organisation intégrée sur l'industrie des assurances dans les Etats africains qui a consacré la création de la CIMA. Les 14 Etats signataires du traité sont : Bénin, Burkina Faso, Cameroun, République Centrafricaine, Comores, Congo, Côte d'Ivoire, Gabon, Guinée Equatoriale, Mali, Niger, Sénégal, Tchad, Togo.

Principaux objectifs de la CIMA

Le traité fixe les principaux objectifs de la CIMA, à savoir :

- Renforcer la coopération dans le domaine des assurances dans les Etats membres ;
- Faciliter les conditions d'un développement et d'un assainissement des entreprises d'assurances ;
- Favoriser l'investissement local des provisions techniques générées par les opérations d'assurances au profit de l'économie nationale ou sous régionale ;
- Poursuivre la politique d'harmonisation et d'unification des dispositions législatives et réglementaires relatives aux opérations d'assurances ;
- Poursuivre la formation des cadres et techniciens d'assurances.

Organes de la CIMA

Les principaux organes de la CIMA :

- Conseil des Ministres des Assurances (CMA) ;
- Secrétariat général ;
- Commission régionale de contrôle des assurances (CRCA) ;
- Directions nationales des assurances (DNA).

L'annexe 1 du traité de la CIMA est le code des assurances. Depuis son entrée en vigueur le 15 Janvier 1995, le Code CIMA a été modifié à plusieurs reprises par le Conseil des Ministres. Nous en sommes à la 4ème édition. Dans sa structuration, le code des assurances est divisé en livres dont le nombre actuel est de neuf (9).

1.2 Risque de souscription non vie

Le risque de souscription est le risque que prend un assureur en distribuant des contrats d'assurance auprès de personnes physiques ou de personnes morales.

1.2.1 Présentation

Le risque souscription non vie fait référence au risque d'assurance qui résulte des contrats d'assurance non vie. Il a trait aux incertitudes relatives aux résultats des souscriptions de l'assureur. Il est lui-même constitué des risques suivants :

- **Risque de prime** : risque que le coût des futurs sinistres soit supérieur aux primes perçues ;
- **Risque de réserve** : risque lié à la nature aléatoire de l'évaluation des sinistres et à leur mauvaise estimation ;
- **Risque catastrophe** : risque résultant d'événements extrêmes ou irréguliers non capturés par les risques de tarification et de provisionnement.

Ainsi, la solvabilité d'une compagnie d'assurance non vie va dépendre de sa maîtrise de ses différents risques. Plusieurs outils ont été développés pour mesurer les risques ; ces outils feront l'objet de la section suivante.

1.2.2 Les mesures de risque

Dans le but de mesurer les pertes futures imprévues, les sociétés d'assurance font le plus souvent appel à des outils très utiles en assurance et en finance : les mesures de risques. La plupart des mesures de risque utilisées sont des quantités statistiques qui décrivent la distribution de pertes d'un portefeuille sur un horizon déterminé à l'avance. Le but de la mesure de risque est généralement de pouvoir représenter par un chiffre réel une incertitude ou une grandeur dont la valeur est inconnue.

1.2.2.1 Les axiomes de cohérence

Soit une mesure de risque ρ définie sur l'espace des variables aléatoires, et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$. L'idéal est que ρ vérifie les propriétés suivantes :

- **Axiome de monotonie** : Pour tous risques X et Y , si $X \geq Y$ alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Ceci se traduit par le fait que la mesure de risque doit pouvoir reproduire l'ordre des risques ; en d'autres termes, plus un risque est grand, plus il doit avoir une mesure de risque élevée. On peut également traduire cet axiome par le fait que les plus gros risques doivent avoir les mesures de risques les plus importantes.
- **Axiome d'homogénéité positive** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$; cet axiome signifie qu'une bonne mesure de risque doit pouvoir capter l'amplitude du risque ; si un risque est multiplié par 2, sa mesure doit également l'être.
- **Axiome de l'invariance par translation** : $\forall k \in \mathbb{R} \quad \rho(X + k) = \rho(X) + k$; il n'y a pas d'incertitude sur les constantes ; donc l'ajout (ou le retrait) d'une quantité déterministe k au risque augmentera (ou diminuera) sa mesure de risque de k également.
- **Axiome de sous-additivité** : Pour tous risques X et Y , $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$; c'est le bénéfice de diversification. En effet, les risques agrégés doivent avoir une mesure de risque inférieure ou égale à la somme de leurs mesures de risques individuelles. Ceci trouve tout son sens dans ces propos d'Artzner « une fusion ne crée pas de risque supplémentaire ».

On qualifiera de **mesure cohérente** une mesure qui vérifie ces 4 axiomes.

1.2.2.2 Quelques mesures de risque

Plusieurs mesures de risque ont été développées dans la littérature. Nous présenterons ici les mesures de risques les plus utilisées.

a) La variance et l'écart-type

L'écart type beaucoup utilisé comme mesure de risque en finance est un outil statistique qui permet de calculer la dispersion d'un ensemble de valeurs par rapport à la moyenne de ces valeurs. L'écart type se calcule par la racine carrée de la variance. Il permet de mesurer la volatilité d'une valeur.

L'écart-type est venu corriger la non-homogénéité positive et la non sous-additivité de la variance.

b) Value-at-Risk

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F . La Value-at-Risk (VaR) de niveau α de X est le quantile de niveau α de la distribution de ce risque. On note $VaR(X, \alpha) = x_\alpha$ avec $P(X \leq x_\alpha) = \alpha$. On peut alors écrire $VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$.

Si X est continue, alors $VaR(X, \alpha) = q_\alpha(X)$. Dans le cas où elle est discrète, nous avons $VaR(X, \alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) \geq \alpha\}$

La Value-at-Risk permet de s'intéresser aux événements rares qui n'arrivent qu'avec une faible probabilité $1 - \alpha$. En assurance, on peut la définir comme le montant qui permettra de couvrir la perte engendrée par le risque avec une probabilité $1 - \alpha$. En d'autres termes, un assureur qui assure un risque X et qui dispose d'un niveau de capital égal à $VaR(X, \alpha)$ a une probabilité de ruine égale à $1 - \alpha$. Par exemple la $VaR(X, 99.5\%)$ est le montant de perte qui sera dépassé avec une probabilité égale à $0,5\%$.

Propriété : La VaR est une fonction croissante de α .

Le problème principal de la VaR en tant que mesure de risque est qu'elle n'est pas toujours sous-additive. Nous allons dans la section suivante présenter une autre mesure de risque utilisée en assurance et qui présente l'intérêt d'être cohérente et de fournir une information sur la distribution au-delà du seuil α choisie.

c) Tail Value-at-Risk

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F . La Tail Value-at-Risk ($TVaR(X, \alpha)$) de niveau α de X est définie par $TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, t) dt$. La TVaR pourrait être vue comme la moyenne de la perte potentielle quand la VaR est dépassée. Pour des distributions continues nous obtenons : $TVaR(X, \alpha) = E[X/X > VaR(X, \alpha)]$.

La $TVaR(X, \alpha)$ majore la $VaR(X, \alpha)$, donc elle est plus prudente ; elle est également croissante en α et est **toujours sous-additive**. La TVaR est une mesure de risque cohérente.

1.3 Généralités sur la réassurance

La garantie accordée par un assureur à un assuré est subordonnée par le paiement d'un montant appelé prime. Cette prime est calculée sur la base de l'espérance mathématiques de survenance des sinistres. Comme la fréquence et les montants des sinistres qui surviennent sont incertains et aléatoires, la charge globale des sinistres est donc une variable aléatoire. Ainsi pour une société d'assurance, sa capacité à faire face à ses engagements va dépendre de sa maîtrise des réalisations de cette variable aléatoire.

Pour pallier à ce problème d'écart de sinistralité pouvant peser lourd sur sa solvabilité, l'assureur pourrait par exemple : augmenter les primes quand c'est nécessaire, augmenter ses fonds propres par apport de capitaux ou par affectation d'une bonne partie des bénéfices aux fonds propres, limiter ses souscriptions. Aucune de ces solutions ne semble avantageuse, puisque la première éventualité risque de nuire à la compétitivité de l'assureur, tandis que la deuxième ne serait guère acceptée par les actionnaires, alors que la troisième l'empêcherait de se développer. L'assureur a par conséquent la possibilité de recourir à la coassurance ou à la réassurance.

La coassurance, par sa nature, elle oblige l'assureur à trouver un accord avec son concurrent en lui fournissant des renseignements sur sa clientèle (assurée).

La réassurance, une solution qui offre la possibilité de se développer tout en maintenant un niveau de solvabilité acceptable.

1.3.1 Définition de la réassurance

Il existe plusieurs définitions de la réassurance. Par exemple selon Hagopian et Laparra (1991) « Pour donner une définition qui ne soit ni économique, ni technique, ni juridique, mais seulement pratique, nous dirons que la réassurance est le moyen grâce auquel l'assureur transfère au réassureur la plus grande part des soucis légitimes que lui cause la technique de sa profession ». Quand on parle de réassurance, il s'agit pour la société d'assurance appelée la cédante, de céder à une société spécialisée appelée le réassureur un risque aléatoire qu'elle a accepté de couvrir contre le règlement d'une prime de réassurance correspondant au risque transféré et au mode de transfert prévu dans le contrat de réassurance. En d'autres termes, le réassureur est l'assureur de l'assureur.

1.3.2 Intérêt de la réassurance pour l'assureur

La réassurance joue un rôle d'appui pour les sociétés d'assurances et est primordiale pour l'émergence et le développement du secteur de l'assurance en zone CIMA. Pour l'assureur, les raisons de se réassurer sont multiples car ce transfert de risque lui offre la possibilité de :

- **Stabiliser ses revenus et à maintenir sa liquidité à un niveau suffisant surtout en cas de sinistralité exceptionnelle** : La réassurance couvre l'assureur au-delà d'un certain plafond, ce qui lui permet de conserver des risques plus homogènes et le protège contre un dérapage éventuel de la sinistralité que ce soit en montant ou en nombre. En d'autres termes, la réassurance permet à l'assureur de faire face aux pics de sinistralité, à la survenance d'un événement rare et coûteux ou à la survenance d'un cumul de sinistres ;
- **Augmenter significativement sa capacité de souscription** : Lorsqu'un assureur acquiert une réassurance, il s'appuie sur le capital d'une autre entité. Il accroît donc sa propre capacité à souscrire des risques et peut donc souscrire plus d'affaires qu'il ne l'aurait pu s'il n'avait pas de réassureurs et ne disposait que de ses fonds propres ;
- **Pour se protéger contre le risque de catastrophe** : Par exemple, dans les pays exposés aux catastrophes naturelles, les assureurs ont tendance à recourir à la réassurance pour se protéger contre les événements catastrophiques pouvant déclencher des indemnisations de masse.

De par l'apport financier, la réassurance apporte une assistance technique à l'assureur en lui apportant son expertise dans certains domaines comme la tarification des risques complexes ; en l'aidant à définir son besoin en réassurance et à construire le plan de réassurance le plus efficace ; en l'aidant à accéder à de nouvelles branches ou à des risques mal connus.

Ainsi, non seulement le réassureur partage les risques et réduire la probabilité de ruine de l'assureur, il lui apporte également une assistance technique.

1.3.3 La réglementation CIMA sur l'activité de réassurance

Malgré son poids économique et son rôle de stabilisateur du marché d'assurance en zone CIMA, la réassurance est longtemps restée sans encadrement législatif spécifique. Cette lacune

est désormais comblée avec la nouvelle réglementation dédiée à la réassurance adoptée le 9 avril 2015. Ce jour, les ministres en charge de l'assurance dans la zone se sont retrouvés au Mali, à Bamako et ont approuvé l'introduction d'un nouveau livre (livre VIII) consacré à cette activité au code des assurances. L'objectif majeur de cette disposition est la professionnalisation de l'activité de la réassurance en zone CIMA. Ainsi les entreprises de réassurance, comme mentionné en l'article 804, ne peuvent avoir d'autre objet que la pratique de l'activité de la réassurance et des opérations directement liées.

Le livre VIII du Code des assurances consacre 44 articles à la réassurance. Y figurent les dispositions générales, les règles de constitution et de fonctionnement, les accords de coopération et d'échanges d'information, le régime financier et les règles comptables.

Toutes les sociétés de réassurance y compris les succursales, bureaux de représentation ou de liaison, basés sur le territoire d'un Etat membre de la CIMA sont soumis à ces dispositions qui font référence à la forme juridique, au capital social, à l'autorité de tutelle, à l'octroi d'agrément, au contrôle financier et aux sanctions.

1.3.4 Critères de classification de la réassurance

La réassurance met en relation une cédante et un cessionnaire, ensemble les deux parties décident si la cession va porter sur tout le portefeuille de la cédante ou si elle se fera risque par risque. La réassurance peut être classée selon deux critères : un premier critère juridique décrivant la forme du contrat et un deuxième plutôt technique, définissant les paramètres liés à la rétention.

1.3.4.1 Critère juridique : Les formes de cession en réassurance

Selon que la cession est obligatoire ou non par l'assureur et que l'acceptation est obligatoire ou non pour le réassureur, on peut établir les trois formes de contrats ou de cession en réassurance ou formes de relations entre assureur et réassureur.

i) La réassurance Facultative

Dans cette forme de réassurance, l'assureur n'est pas obligé de céder, et le réassureur n'est pas obligé d'accepter. Cette réassurance se fait risque par risque et les conditions de cession sont négociées risque par risque.

S'appliquant risque par risque, la réassurance facultative présente toutefois l'inconvénient d'engendrer des coûts élevés en matière de gestion.

ii) La réassurance Facultative / Obligatoire

Appelée communément « la réassurance FACOB », l'accord conclu entre l'assureur et le réassureur stipule que le réassureur s'engage à accepter tous les risques ou affaires que l'assureur va choisir de lui présenter. Ici, les cessions se font risque par risque et les conditions de cession sont négociées risque par risque.

iii) La réassurance Obligatoire

Dans cette forme de réassurance, l'accord conclu stipule que l'assureur s'engage à placer tous les risques concernés au réassureur et celui-ci s'engage à les accepter. Les cessions portent sur un groupe de risques ou sur tout le portefeuille de l'assureur selon des modalités définies dans un contrat appelé « traité de réassurance ».

En pratique, la cession facultative couvre généralement les risques exclus du traité.

1.3.4.2 Critère technique : Les types de cession en réassurance

Il s'agit ici du type de partage des risques. Une fois que l'assureur et le réassureur ont décidé de l'une des formes de cession ci-dessus, ils doivent ensuite décider du mécanisme ou de la technique de partage des primes des affaires faisant l'objet de réassurance et les sinistres touchant lesdites affaires. Ainsi, il existe deux techniques selon que le partage se fait sur base proportionnellement (même pourcentage des primes reçues par le réassureur que celui des sinistres à sa charge) ou non.

i) Cession proportionnelle

Il existe deux formes de réassurance proportionnelle : la quote-part et l'excédent de plein.

a) La quote-part (QP)

Dans ce type de cession, le réassureur partage un pourcentage équivalent des primes et des sinistres du portefeuille de la cédante. Ainsi dans ce type de contrat, le sort de la cédante et du réassureur sont très liés. C'est la plus simple forme de cession.

Illustration :

Prenons un traité en quote-part à $a\%$ de conservation sur un risque quelconque. L'assureur verse $(1 - a)\%$ des primes aux réassureurs, qui en contrepartie prend en charge $(1 - a)\%$ des sinistres.

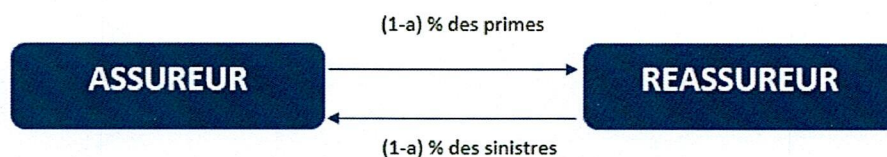


FIGURE 1.1 – Illustration du mécanisme du traité QP

Avantages de la cession en quote-part :

- Partage du risque qui favorise la confiance, le partenariat à long terme ;
- Processus très simple, par conséquent un coût de traitement réduit.

Inconvénients de la cession en quote-part :

- Le montant de la prime cédée par l'assureur peut être très élevé si la capacité dont il a besoin est importante ;
- La compagnie d'assurance peut céder des risques et les primes correspondantes qu'elle pourrait conserver sans problèmes ;
- Le montant de la prime cédée par l'assureur peut être très élevé si la capacité dont il a besoin est importante ;
- Les traités QP n'offrent pas de protection contre les déviations de gros sinistres, plus précisément le rapport sinistres-primes reste le même, brut (avant réassurance) ou net (après réassurance).

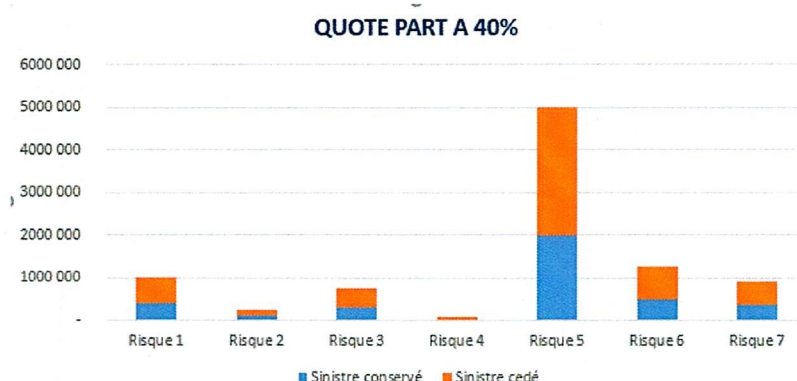


FIGURE 1.2 – Exemple d'un traité en Quote-part

Pourquoi les compagnies d'assurance utilisent-elles les traités QP ? :

- **Pour répondre aux exigences de solvabilité :** Les engagements envers les assurés sont réduits pour être en phase avec les fonds propres disponibles ;
- **Pour créer une nouvelle entreprise ou une nouvelle branche :** Si l'expérience d'une compagnie d'assurance est faible avec un portefeuille volatile et incertain, alors elle cédera une QP avec un taux de cession élevée qui diminuera dans le temps avec la croissance du portefeuille et l'expérience acquise ;
- **Pour se protéger contre les écarts de fréquence des sinistres :** En appliquant cela sur portefeuille d'affaires, la charge financière de l'assureur est diminuée en cas du hausse de la sinistralité. Il est à noter que cette diminution de charge ne garantit pas sa solvabilité envers ses assurés.

Pour corriger la faiblesse qui consiste à céder tous les risques dont la cédante a la capacité de conserver pour son propre compte et sans faire appel à la réassurance, nous pouvons choisir une autre forme de réassurance, le traité en "excédent de plein".

b) L'excédent de plein (EDP)

La réassurance en excédent de plein est aussi un traité proportionnel, car les primes et les sinistres sont partagés selon un ratio défini à l'avance. On définit d'abord le plein de rétention ou plein de conservation : le réassureur va intervenir uniquement sur les polices dépassant un ce montant de garanti. L'assureur conserve donc un montant sur tous les risques dont le capital dépasse le plein de conservation et il cède au réassureur la partie qui dépasse ce plein jusqu'à un montant maximal dit plein de souscription. L'engagement maximum du réassureur (le plein de souscription) est en général égal à un nombre multiple entier du plein de conservation.

Pour simplifier, il s'agit d'une quote-part dont le taux de cession n'est pas connu à la signature du traité mais calculé risque par risque, une fois les affaires souscrites.

Le plein de rétention peut encore être vu comme le montant maximal que la cédante est prête à assumer par sinistre.

Soient Ca_i le capital assuré pour le risque i , PS le plein de souscription, PR le plein de rétention et T_i le taux de cession pour le risque i . Le taux de cession de ce risque est donné par :

$$T_i = \min\left(\max\left(0; \frac{Ca_i - PR}{Ca_i}\right); \frac{PS}{Ca_i}\right)$$

Avantages de la cession en excédent de plein :

- Profil homogène des risques conservés par l'assureur ;
- Volume moins important des primes cédées par rapport au traité Quote-Part ;
- Conservation de la totalité des petits et moyens risques.

Inconvénients de la cession en excédent de plein :

- Lourdeur dans la gestion des opérations ;
- Le partage de sort entre l'assureur et le réassureur n'est pas total ;
- Les traités en excédent de plein ne protègent pas totalement contre l'accumulation de sinistres générés pas un même évènement.

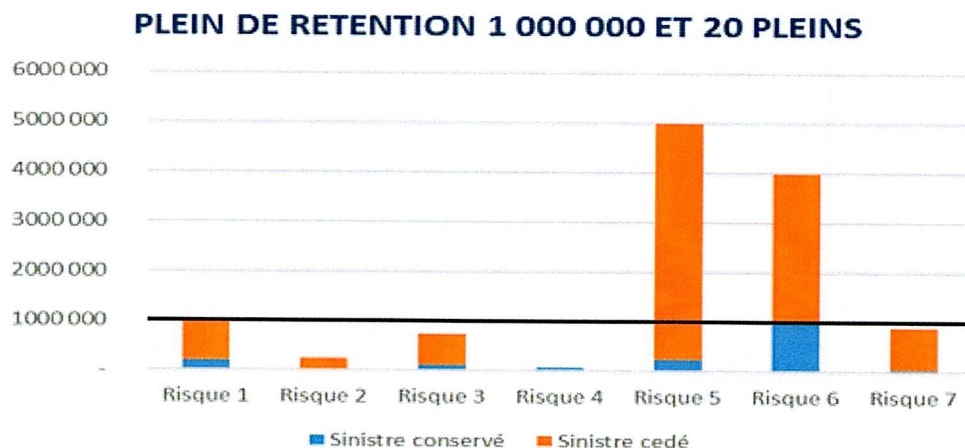


FIGURE 1.3 – Exemple d'un traité en Excédent de plein

c) Caractéristiques de la cession proportionnelle

La réassurance proportionnelle apparaît donc comme une technique employée par des sociétés d'assurance qui ont des niveaux de fonds propre relativement limités et une appréciation difficile des résultats techniques des premières années. En pratique, ce type de réassurance, fait entrer en jeu les notions de commission de réassurance et de participation aux bénéfices.

Commission de réassurance :

Figurants comme clause dans le traité, les commissions de réassurance correspondent à des versements du réassureur à la cédante pour la gestion de l'activité. C'est sa contribution pour l'affaire que l'assureur lui a apportée et pour la gestion des sinistres faite par l'assureur.

Participation aux bénéfices et résultat :

Dans un traité de réassurance en quote-part, on prévoit généralement qu'en cas de résultat bénéficiaire, le réassureur devra donner à l'assureur une partie de ce bénéfice. Mais pour un partage équitable, cette participation bénéficiaire est assortie d'une clause de report de pertes des années antérieures qui en pratique peut aller parfois jusqu'à 5 ans.

Si on note par t_x le taux de participation aux bénéfices, p_c la prime cédée, C_r la commission de réassurance, S_c la charge de sinistre cédée, et fg_r les frais généraux du réassureur, alors la participation aux bénéfices est donnée par :

$$PB = \max(0; (p_c - C_r - S_c - fg_r) * t_x)$$

ii) Cession non proportionnelle

Contrairement à la réassurance proportionnelle, dans le cas d'un traité de réassurance non proportionnelle, il y'a pas de lien direct entre la prime reçue par le réassureur et le montant de sinistre qu'il va payer. Ce type de cession est entièrement défini par deux paramètres : la rétention¹ et la capacité². Une fois le plafond rétention + capacité dépassé, le reste du montant de sinistres revient à la charge de l'assureur.

Il existe deux formes de réassurance non proportionnelle : l'excédent de sinistre et l'excédent de perte annuelle.

a) L'excédent de sinistre

Dans ce type de traité, l'assureur définit le montant maximum³ qu'il peut conserver et le réassureur prend en charge l'excédent dans la limite d'un maximum⁴. Le contrat peut être établi par risque ou part événement.

-
1. seuil de montant de sinistre en dessous duquel l'assureur prend en charge les sinistres en question
 2. montant maximal que peut prendre en charge le réassureur
 3. rétention, priorité ou franchise
 4. capacité ou portée

Dans le premier cas le réassureur s'engage à payer à chaque fois qu'un sinistre supérieur à la priorité survient sur une police concernée.

Dans le second cas, il intervient à chaque survenance d'événement (par exemple une tempête) et éventuellement sur plusieurs polices, ainsi le dommage est constitué de plusieurs sinistres, nés d'une même cause comme par exemple une catastrophe naturelle, un accident industriel, un déraillement de train. A ce type de contrat, sont généralement ajoutées des clauses restrictives dans l'espace (clause de limitation géographique) et le temps (clause de limitation dans le temps) pour limiter la charge du réassureur.

On note ce type de traité par **Portée XS Priorité** et dans ce cas, la part du réassureur dans le sinistre ayant comme montant S est à hauteur de :

$$\min(\text{Portée}; \max(S - \text{Priorité}; 0))$$

La différence fondamentale entre un traité de type excédent de plein et un excédent de sinistre réside dans les nuances suivantes :

- Sur un traité de type excédent de plein, un taux de cession est défini en fonction des capitaux assurés. En effet, l'assureur définit un plein de rétention (montant correspondant au risque auquel il accepte d'être exposé). Ensuite, en fonction du capital assuré et dans la limite de la portée que le réassureur accepte de porter, un taux de cession est défini. Le calcul des primes et sinistres cédé se fera en fonction de ce taux de cession ; d'où le caractère proportionnel de ce traité ;
- Au contraire, sur un contrat en excédent de sinistre, le taux de prime n'est pas lié au taux de risque cédé. Ici, lorsqu'un sinistre survient (quel que soit le capital assuré), l'assureur porte la charge de sinistre dans la limite de sa priorité. Ensuite vient le réassureur qui intervient pour porter la charge sinistre au-delà de l'intervention de l'assureur tout en restant de la limite de la portée qu'il.

b) L'excédent de perte annuelle

Appelé généralement STOP LOSS, l'assureur a recours à ce type de traité lorsqu'il cherche à se prémunir contre les mauvais résultats en optant pour une couverture qui concernel'ensemble des sinistres survenus au cours de l'exercice, soit une branche donnée, soit sur tout son portefeuille. Ainsi Sur une branche donnée, il va ainsi se fixer un S/P (exprimée en taux annuel de sinistre par rapport aux primes de l'année de réassurance) limite, et céder tous les sinistres au-delà de ce S/P seuil. Comme dans le cas du XS, ce type de réassurance est défini par une priorité et une portée, mais celles-ci sont cette fois-ci exprimées en pourcentage.

Un tel traité permet de se prémunir contre une dégradation des résultats, quelle qu'en soit la cause. L'assureur s'assure ainsi d'obtenir le résultat voulu, et est protégé contre l'accumulation de sinistres. Ce type de traité présente par contre l'inconvénient d'être extrêmement coûteux pour la cédante.

Si nous notons ce traité par Portée SL Priorité, S le cumul des sinistres enregistré au cours de l'exercice et PR le montant des primes encaissées alors la part du réassureur est :

$$\min(\max(0; \frac{S}{PR} - \text{Priorité}); \text{Portée})$$

c) Caractéristiques de la cession non proportionnelle

La notion de reconstitution

Dans un traité en excédent de sinistres, le réassureur met une certaine portée à la disposition de la cédante pour le cas où surviendrait un sinistre. Mais la cédante ne doit pas se trouver à découvert si jamais plusieurs sinistres survenaient et absorbaient toute la portée. La clause de reconstitution sert donc à reconstituer la couverture après un sinistre ; autrement dit, à maintenir pour la cédante le même niveau de protection.

La clause de reconstitution de garantie s'applique dès que la portée a été partiellement ou totalement absorbée par un sinistre. Lorsque le réassureur accorde N reconstitutions de garantie, il s'engage à payer au maximum $N+1$ fois la portée durant la période de référence du traité soit la garantie initiale plus les reconstitutions. Cette reconstitution peut être gratuite mais se fait souvent au moyen d'une prime additionnelle, définie comme un certain pourcentage de la prime initiale et proportionnelle au temps restant à couvrir sur la période de référence.

Clause de franchise annuelle : A.A.D (Annual Aggregate Deductible)

Présent dans les traités XS, la clause A.A.D est la clause de franchise annuelle. Elle a pour but de restreindre l'engagement du réassureur et donc de diminuer le coût de la réassurance. Le réassureur ne commencera à prendre en charge les sinistres que lorsque la charge annuelle dépassera ce montant.

Clause de limite annuelle : A.A.L (Annual Aggregate Limit)

La clause A.A.L., représente la limite d'intervention maximale du réassureur sur l'année. Dans l'année, le réassureur ne paiera jamais plus que ce montant. Lorsque le traité prévoit N reconstitutions, nous avons : $AAL = (N + 1)portée$.

Que ça soit en réassurance proportionnelle ou non, le traité de réassurance est en général défini par certaines dispositions qui dans la pratique, sont regroupées en deux parties distinctes telles que les conditions générales qui définissent le cadre général du traité et les conditions particulières qui précisent de manière détaillée les conditions générales.

1.4 La cédante et son programme de réassurance

La cédante est une société d'assurance non vie dans la zone CIMA.

1.4.1 Ses produits commercialisés

La cédante apporte ses services dans :

- L'assurance santé ayant comme garanties les plus courantes la garantie soins infirmiers, analyses de laboratoires, consultations, hospitalisation, chirurgie, radiologie, échographie, scanner, Pharmacie ;

- La multirisques habitation ayant comme garanties les plus courantes, la garantie dégât des eaux, incendie, bris de glace, vol et vandalisme, catastrophes naturelles ;
- L'incendie et multirisques professionnelle ;
- L'assurance automobile ayant comme garanties les plus courantes la garantie responsabilité civile, dommages, dommage causé au véhicule par incendie, dommage causé au véhicule par vol, les bris de glace, personne transportés, défense et recours ;
- L'assurance transports marchandise.

. Tous les produits commercialisés sont regroupés en cinq branches : Véhicule terrestre à moteur, Responsabilité civile générale, Marchandises transportées, Maladie, Incendie et risque annexes, Dommages corporels et Autre Dommages aux biens.

Restriction de notre étude

Dans le cadre de notre étude, nous allons nous limiter à la garantie responsabilité civile automobile car elle est une garantie obligatoire pour toute personne physique ou morale détenteur d'un véhicule terrestre à moteur⁵ et cette garantie est la plus représentée dans le portefeuille de notre cédante. Le travail ainsi fait pourra être refait de manière analogue aux différentes autres garanties.

La responsabilité civile est l'obligation de réparer les dommages causés à autrui. En matière d'assurance automobile, il s'agit de réparer les dommages causés par la voiture assurée : dégâts matériels, blessures, maladie, décès.

1.4.2 Son programme de réassurance en place

En ce qui concerne la garantie d'étude (responsabilité civile automobile), est souscrite des traités de réassurance non proportionnelle, plus précisément l'excédent de sinistre (XS). Le tableau ci-dessous résume le plan de réassurance souscrit :

	XS pool	XS 1	XS 2
Priorité	20 000 000	400 000 000	1 000 000 000
Portée	380 000 000	600 000 000	3 000 000 000
Taux de prime	3,30%	0,77%	0,18%

TABLE 1.1 – Structure de réassurance en place (RC Auto)

5. article 200 du code CIMA

STATISTIQUE DESCRIPTIVE ET RETRAITEMENT DES DONNÉES

La qualité des données étant déterminante sur celle des résultats à obtenir, il est primordial de s'assurer que les données utilisées sont de bonne qualité et ont du sens. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter la base de données et y faire des traitements, ensuite analyser quelques statistiques descriptives enfin retraiter la base de données.

2.1 Description de la base de données

La cédante a mis à notre disposition plusieurs fichiers Excel qui contiennent les informations sur sa sinistralité de 2013 à 2020 en ce qui concerne la garantie responsabilité civile automobile. Le tableau ci-dessous donne une description générale des variables de la base traitée d'étude obtenu après de nombreux traitements.

Variables	Lignes toujours renseignées	Comentaires
Numéro sinistre	oui	Numéro du sinistre
Survenance	oui	Année de survenance du sinistre
Déclaration	oui	Année de déclaration du sinistre
eval_depense	oui	Montant du sinistre
Année règlement	oui	Année de règlement du sinistre
Règlement	oui	Montant du règlement du sinistre
SAP	oui	Sinistres à payer
Recours	oui	Montant des recours

FIGURE 2.1 – Description des variables de la base de données traitée

Il est à noter que cette base traitée ne contient pas de doublons, toutes les variables d'études sont renseignées, il n'y a pas de lignes telles que l'année de survenance soit supérieure à l'année de déclaration, il n'y a pas de lignes telles que l'année de déclaration soit supérieure à l'année de règlements.

2.2 Statistique descriptive

Afin de se familiariser davantage avec les données, il est nécessaire d'effectuer quelques statistiques descriptives sur les données de sinistres retraitées de l'inflation et projetées à l'ultime.

Min	1st quartile	Median	Mean	Standard deviation	3 rd quartile	Max
0	71 925	402 678	2 609 654	6 562 391	1 816 770	54 699 745

TABLE 2.1 – Quelques statistiques du coût des sinistres

Comme nous pouvons le voir, la variable représentant le coût des sinistres est très hétérogène : son écart-type est de 6 562 391, sa moyenne est de 2 609 654 alors que son 3ème quartile est de 1 816 770. Ainsi 75% des coûts de sinistres sont inférieurs à 1 816 770 et donc à la moyenne. Cette hétérogénéité aura un impact important sur la manière de déterminer la loi des sinistres.

Les coûts moyens historiques par année de survenance sont renseignés dans le tableau suivant :

Année de survenance	Coût moyen
2013	2 276 886
2014	3 134 405
2015	1 751 389
2016	2 428 745
2017	3 863 926
2018	11 328 781
2019	454 474
2020	298 341
Total	25 536 948

TABLE 2.2 – Quelques statistiques du coût des sinistres

Ces coûts moyens ne peuvent pas être comparés entre eux car il s'agit des données historiques non retraitées de l'inflation. Il sera question dans la section suivante de retraiter ces données historiques de l'inflation afin d'obtenir des statistiques comparables.

2.3 Mise en as-if

Les données comptables des sinistres de deux années différentes ne peuvent pas être directement comparées car elles ne sont pas sur un même référentiel. En effet au moment du règlement d'un sinistre, l'assureur a auparavant estimé les coûts de l'indemnisation : réparation, frais médicaux, etc. en tenant compte de multiples paramètres tels que le prix de la main d'œuvre, des matières premières, soins médicaux... Or d'une année à l'autre, les prix de ces différents facteurs

changent (la valeur d'un francs CFA il y a de cela 3 ans n'est pas la même que celle d'un francs CFA aujourd'hui). Pour pallier à ce problème, nous pouvons utiliser la méthode « mise en as-if ». Elle consiste à retraiter les données de l'inflation. Il s'agit en fait d'une translation de tous les sinistres à l'année de projection (2021 dans le cas de notre étude), afin d'évaluer la charge de chacun de ces sinistres comme s'ils étaient survenus durant l'année de projection.

2.3.1 Méthodologie

Pour mettre nos données en as-if, nous avons le choix entre deux méthodologies :

- **La mise en as-if rétrospective** : qui considère que l'inflation future serait similaire à l'inflation passée ;
- **La mise en as-if prospective** : qui considère que l'inflation future serait différente de l'inflation passée.

Etant donné que nous ne disposons pas d'arguments solides pour affirmer que l'inflation future ne sera pas différente de l'inflation passée, nous allons utiliser la mise en as-if prospective.

Soit un sinistre k survenu l'année i . Notons par $X_{i,j}^k$ la charge non cumulée évaluée l'année $i + j$ (développement j) au titre de ce sinistre ; $X_{i,0}^k$ étant la somme du montant réglé l'année de survenance et de la provision constituée au titre de ce sinistre la même année. Le vecteur des incréments de charges de ce sinistre est alors $(X_{i,0}^k, \dots, X_{i,j}^k, \dots, X_{i,n}^k)$.

La charge $X_{i,j}^k$ mise en as-if est donnée par :

$$X_{i,j}^{k, as-if} = X_{i,j}^k * \frac{I_{2021+j}}{I_{i+j}}$$

Dans ces notations, i varie de 2013 à 2020, j varie de 0 à 7 et I_l désigne la valeur de l'indice d'inflation l'année l .

2.3.2 Indice utilisé

Tel qu'explicité ci-dessus, la mise en as-if des données historiques est basée sur l'évolution d'un indice. L'indice choisi est celui des prix à la consommation (IPC) au Cameroun. En effet l'IPC mesure l'évolution du niveau moyen des prix des biens et services consommés par les ménages, pondérés par leur part dans la consommation moyenne des ménages. Cet indice permet de mesurer l'inflation (ou la déflation) sur une période et donc l'évolution de la valeur de la monnaie.

Selon l'Institut national de la statistique et des études économiques, l'IPC est l'instrument de mesure de l'inflation¹.

2.3.3 Projection de l'indice

La méthodologie de mise en as-if que nous avons retenue prend en compte l'inflation future. Pour l'indice choisit, nous disposons des informations jusqu'en 2020. Afin de prendre en compte

1. <https://www.insee.fr>

l'inflation future, nous allons projeter cet indice. Plus concrètement, nous allons estimer la tendance dans la série de l'indice et projeter cet indice dans le futur suivant cette tendance.

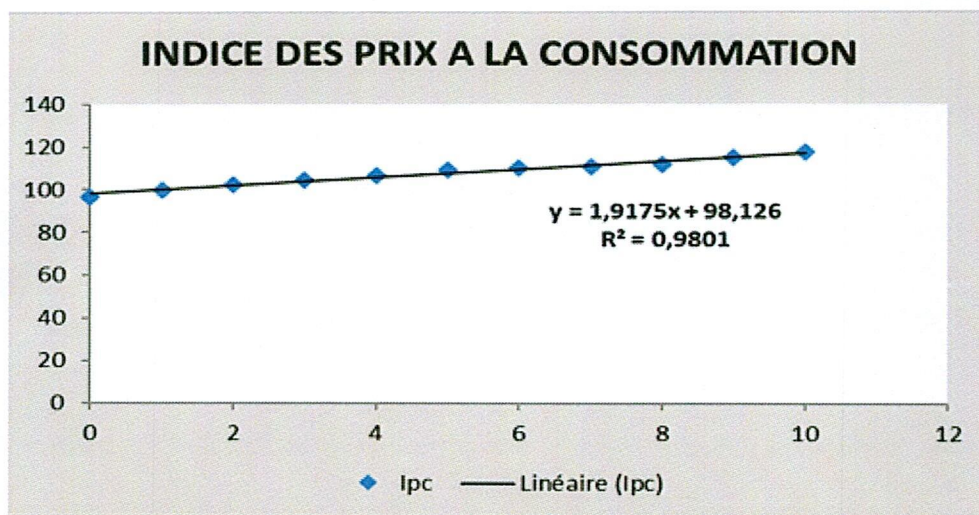


FIGURE 2.2 – Projection de l'indice

Comme le R^2 est très proche de 1, nous avons une bonne qualité d'ajustement.

2.3.4 Résultats et impact de la mise en as-if

Après avoir corrigé par l'inflation les données de sinistres par le procédé décrit plus haut, le tableau ci-dessous présente le taux de variation obtenu :

Année de survenance	Charges	Charges as-if	Variation
2013	321 040 907	368 234 023	14,7%
2014	554 789 623	617 303 452	11,3%
2015	241 691 679	267 796 605	10,8%
2016	361 883 029	393 334 089	8,7%
2017	309 114 115	330 162 700	6,8%
2018	147 274 153	154 323 027	4,8%
2019	17 270 012	17 780 235	3,0%
2020	4 176 780	4 231 864	1,3%
Total	1 957 240 298	2 153 165 995	10,0%

TABLE 2.3 – Impact de la mise en as-if

De façon globale, la mise en as-if a eu un impact à la hausse de 10.0% sur la charge totale de sinistres. De plus, par année de survenance, les résultats sont globalement cohérents car l'impact de l'inflation est décroissant avec la survenance. En effet, pour une vision au 31 décembre 2021, les sinistres survenus en 2013 sont plus développés par rapport à ceux survenus en 2020 ; et par conséquent les sinistres survenus en 2013 sont plus sujets à l'inflation que ceux survenus en 2020.

2.4 Mise à l'ultime

La mise à l'ultime est très importante car elle permet d'avoir une vision plus juste du risque. Pour la projection à l'ultime des sinistres, nous avons utilisé la méthode de Chain Ladder Standard.

2.4.1 Présentation de la Méthode de Chain Ladder Standard

La méthode Chain Ladder standard est une méthode déterministe fréquemment utilisée car facile à mettre en œuvre. Elle s'applique à des triangles de paiements cumulés ou des triangles de charges. L'objectif de cette méthode est l'estimation des montants futurs de la charge totale des sinistres par année de survenance.

La méthode de Chian Ladder est basée sur l'utilisation des facteurs de développement, supposés constants pour chaque année. En notant par $C_{i,j}$ la charge mise en as-if évaluée l'année $2013 + i + j$ au titre des sinistres survenus l'année $2013 + i$; avec $i, j = 0, \dots, n - 1$; où $n + 1$ correspond au nombre d'années de survenance, les facteurs de développement individuels sont donnés par $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$, $j = 0, \dots, n - 1$. Cette méthode s'appuie sur l'hypothèse suivante :

(CL) : Le ratio $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ ne dépend pas de l'année de survenance i .

Sous cette hypothèse, un estimateur sans biais du facteur de développement de l'année j est donné par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, j = 0, \dots, n - 1$$

A partir des facteurs de développement, nous pouvons estimer les charges futures par :

$$\forall j \geq n - i + 1, \hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{f}_k$$

Validation de l'hypothèse du modèle : l'hypothèse du modèle de Chain Ladder peut être validée à travers l'une des deux méthodes suivantes :

- **la méthode graphique des CC-plots :** Sous l'hypothèse du modèle, pour une année de développement donnée j , les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=0, \dots, n-j-1}$ doivent être sensiblement alignés par une droite passant par l'origine ;
- **la méthode du d-triangle :** Sous l'hypothèse du modèle, les éléments $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ de chaque colonne du triangle doivent être sensiblement égaux.

2.4.2 Validation de l'hypothèse de la Méthode de Chain Ladder

Les CC-plots :

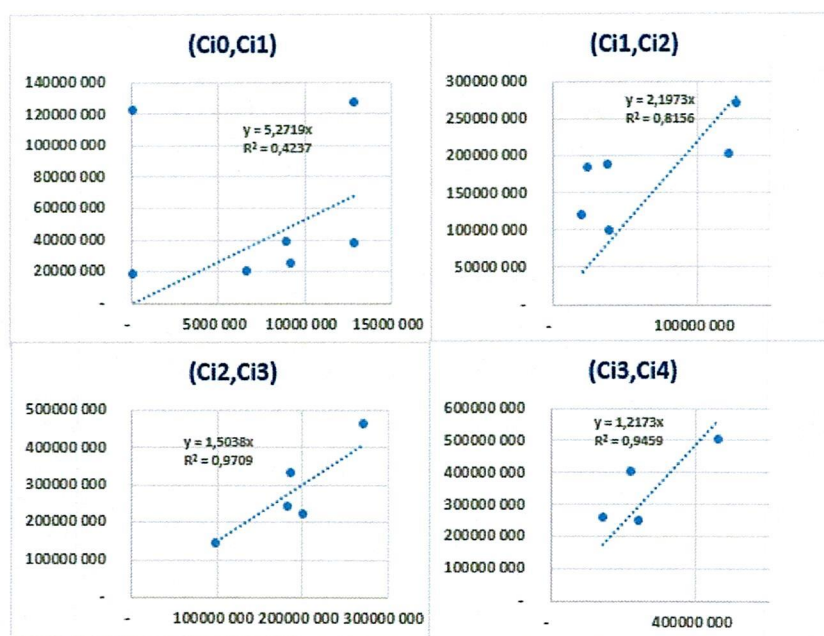


FIGURE 2.3 – CC-plots pour la validation de l'hypothèse de Chain Ladder

Pour les années de développement 0 et 1, l'hypothèse du modèle de Chain ladder semble ne pas être totalement vérifiée ; mais à partir de l'année de développement 2, on voit que les points sont presque alignés sur une droite qui passe par l'origine car le R^2 est proche de 1. Nous pouvons conclure que l'hypothèse du modèle est presque vérifiée à partir de la deuxième année.

Le d-triangle :

		ANNEE DE DEVELOPPEMENT					
ANNEE DE SURVENANCE		0	1	2	3	4	5
	2013	4,3534	2,5393	1,4572	1,8082	1,0010	1,3715
	2014	9,8659	2,1377	1,6979	1,0788	1,0483	1,1960
	2015	2,6779	7,4711	1,3071	1,0362	1,0768	
	2016	1274,9	1,6473	1,1009	1,7812		
	2017	2,9340	4,9831	1,7636			
	2018	3,0517	5,8921				
	2019	140,24					
Moyenne		205,4328	4,1118	1,4654	1,4261	1,0420	1,2838
Ecart type		474,3042	2,3519	0,2743	0,4261	0,0383	0,1241

TABLE 2.4 – d-triangle pour la validation de l'hypothèse de Chain Ladder

On constate que l'écart type est relativement petit à partir de la deuxième colonne. Ainsi les facteurs individuels sont sensiblement égaux à partir de la deuxième colonne. Nous pouvons conclure que l'hypothèse du modèle est presque vérifiée à partir de la deuxième année. Les facteurs de développement de Chain-Ladder sont donnés dans le tableau ci-après.

j	0	1	2	3	4	5	6
Facteurs de developpement	7,664	2,866	1,482	1,313	1,043	1,254	1,031

TABLE 2.5 – Facteurs de developpement de Chain ladder

2.4.3 Résultats de la projection à l'ultime

L'hypothèse de Chain-Ladder n'étant pas totalement validée, nous allons qu'à même utiliser les facteurs de développement calculés précédemment, pour la projection à l'ultime. Nous allons projeter à l'ultime les données de sinistres corrigées de l'inflation. Le procédé est le suivant :

Soit un sinistre k survenu l'année $2013 + i$

- Si le sinistre est clos c'est-à-dire $SAP^k = 0$, on reconduit la dernière valeur connue du sinistre corrigée de l'inflation comme sa valeur ultime ;
- Sinon on utilise les coefficients de développement comme mentionné plus haut.

Nous avons donc la formule suivante :

$$\hat{C}_{i,n}^{k,ultime} = \begin{cases} C_{i,n-i}^{k,inflate} & \text{Si } SAP_{i,n-i}^k = 0 \\ C_{i,n-i}^{k,inflate} * \prod_{j=n-i}^{n-1} f_j & \text{Si } SAP_{i,n-i}^k \neq 0 \end{cases}$$

En appliquant le procédé ci-dessus sur nos données, nous obtenons le tableau ci-dessous :

Année de survenance	Charges	Charges(as-if)	Charges(as-if/ult)	Variations		
				$\Delta(\text{chg}; \text{chg}(\text{as-if}))$	$\Delta(\text{chg}(\text{as-if}); \text{chg}(\text{as-if}/\text{ult}))$	$\Delta(\text{chg}; \text{chg}(\text{as-if}/\text{ult}))$
2013	321 040 907	368 234 023	368 234 023	14,7%	0,0%	14,7%
2014	554 789 623	617 303 452	635 976 631	11,3%	3,0%	14,6%
2015	241 691 679	267 796 605	345 267 232	10,8%	28,9%	42,9%
2016	361 883 029	393 334 089	528 816 259	8,7%	34,4%	46,1%
2017	309 114 115	330 162 700	582 176 912	6,8%	76,3%	88,3%
2018	147 274 153	154 323 027	402 843 748	4,8%	161,0%	173,5%
2019	17 270 012	17 780 235	132 838 270	3,0%	647,1%	669,2%
2020	4 176 780	4 231 864	241 974 123	1,3%	5617,9%	5693,3%
Total	1 957 240 298	2 153 165 995	3 238 127 198	10,0%	50,4%	65,4%

TABLE 2.6 – Résultats de la mise à l'ultime

Comme nous pouvons le voir, la projection à l'ultime a un impact plus prononcé sur les années les plus récentes; ceci est tout à fait cohérent car ces années sont moins développées. La projection à l'ultime impacte à la hausse de la charge totale de sinistres historiques corrigé de l'inflation de 50.4%. L'impact conjoint de la correction de l'inflation et de la projection à l'ultime sur la charge totale de sinistres historiques est de 65.4% à la hausse.

Nous avons à ce niveau pour la garantie responsabilité civile automobile, des données corrigées de l'inflation et projetées à l'ultime. Cependant, nous ne pouvons pas encore faire une modélisation de ces données car nous ne savons pas encore lesquels de nos sinistres peuvent être qualifiés de sinistres attritionnels ou de sinistres graves. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

ÉTUDE DU SEUIL DE SINISTRE GRAVE

La théorie des valeurs extrêmes, branche de la statistique qui s'intéresse aux queues de distribution est essentielle en assurance car les montants de sinistre les plus élevés présentent en effet une distribution spécifique. Elle permet donc de détecter et de modéliser les comportements atypiques c'est-à-dire ceux qui sont très différents de la tendance générale. L'estimation des queues de distribution s'appuie sur cette théorie, qui fournit des procédures rationnelles et scientifiques. Elle permet d'isoler les valeurs extrêmes et de les modéliser séparément du reste de la distribution afin d'améliorer leur prédiction tout comme celle des valeurs ordinaires. La distinction suppose de définir un seuil à partir duquel une valeur est considérée comme extrême. Le choix de ce seuil repose sur un arbitrage biais-variance : il doit être choisi suffisamment élevé pour que les distributions asymptotiques soient valables, mais le plus faible possible (contrainte de biais) afin de disposer d'un nombre d'observations correct, c'est-à-dire qui permette d'obtenir un estimateur de variance modérée pour la distribution des valeurs extrêmes. Le seuil issu de ce travail déterminera notre définition d'un sinistre « grave », par opposition à la sinistralité dite « attritionnelle » qui répond à des problématiques de modélisation différentes.

Les sinistres attritionnels sont les sinistres de forte fréquence et de montants faibles et les sinistres graves sont les sinistres de faible fréquence et de montants très élevés.

3.1 Rappels sur la théorie des valeurs extrêmes

Le but de cette partie est d'explicitier la théorie autour de la détermination du seuil à partir duquel on peut qualifier un sinistre de « sinistre grave » et de montrer que l'on a de bonnes raisons théoriques de choisir une loi de Pareto Généralisée pour modéliser les sinistres dépassant un seuil.

Il existe deux approches dans cette théorie : l'approche par « maximum » et l'approche par « excès au-dessus d'un seuil ». Nous résumerons ici les principaux résultats issus de la théorie des valeurs extrêmes nécessaires à notre étude.

3.1.1 Distribution du maximum

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition (commune) F . Si on note $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et si F

admet un moment d'ordre 2, alors le théorème centrale limite garantit que :

$$\frac{S_n - nE(X)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{loi} N(0, 1)$$

Lorsque le moment d'ordre 2 n'existe pas, le théorème centrale limite généralisé garantit que pour deux suites a_n et b_n bien choisies, on peut connaître le comportement asymptotique de $\frac{S_n - a_n}{b_n}$.

Ce théorème peut être transposé à la loi du maximum $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ centré et normalisé, sauf que la loi limite n'est plus nécessairement normale. La fonction de répartition F_n de maximum M_n est donnée par $F_n(x) = (F(x))^n$, pour tout réel x .

Le premier théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes précise les lois asymptotiques que peut suivre le maximum normalisé d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Théorème : FISHER-TIPPELT

S'ils existent deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$) et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la maximum renormalisé $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ converge en loi vers une variable aléatoire non dégénérée¹ c'est-à-dire

$$\forall x, \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F(a_n x + b_n)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} G(x)$$

pour une distribution non dégénérée G , alors à une translation et à un changement d'échelle près, G est de l'une des trois formes suivantes :

- Loi de Fréchet ($\alpha > 0$) : $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$
- Loi de Weibull ($\alpha > 0$) : $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$
- Loi de Gumbel : $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$ $x \in \mathbb{R}$

Les trois familles de loi de valeurs extrêmes précédentes peuvent être paramétrées en une seule famille de distribution appelée « famille de distribution des valeurs extrêmes $GEV(\mu, \sigma, \xi)$ » définie par la fonction de répartition :

$$G(x) = \begin{cases} \exp(-[1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma})]_+^{-1/\xi}) & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma}))) & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Où $x_+ = \max(x, 0)$, ξ est le paramètre de forme, μ le paramètre de position et σ est le paramètre d'échelle.

pour $\xi \neq 0$, on notera $G_\xi(x) = \exp(-(1 + \xi x)_+^{-1/\xi})$.

La correspondance entre la GEV et les lois limites est déterminée par le paramètre de queue :

1. non constante

- La distribution de Gumbel (queue fine) correspond à $\xi = 0$: $GEV(0, 1, 0) = \text{Gumbel}$;
- La distribution de Fréchet (queue lourde) correspond à $\xi > 0$: $GEV(0, \alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = \text{Fréchet}(\alpha)$;
- La distribution de Weibull (support borné) correspond à $\xi < 0$: $GEV(1, \alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = \text{Weibull}(\alpha)$.

Définition : Max-stabilité

Une loi L_0 est max-stable si pour tout échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de taille quelconque $n \geq 2$ de loi L_0 , ils existent deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$) et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la maximum renormalisé $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ est de loi L_0 .

Proposition :

Les seules lois de probabilité qui sont max-stables sont les trois familles de loi de valeurs extrêmes ci-dessus.

Définition et détermination : Domaine d'attraction

Une loi L_0 ou sa fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction d'une loi des GEV de fonction de répartition G et on note $F \in \mathbb{DA}(\mathbb{G})$ si le renormalisé du maximum d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi L_0 converge en loi vers cette variable aléatoire des GEV de fonction de répartition G .

Les lois usuelles utilisées en assurance non-vie pour la modélisation des sinistres graves correspondent au cas $\xi \geq 0$. Pour savoir si on est dans le cas $\xi = 0$ ou $\xi > 0$ on peut tracer les graphes suivants :

• **Graphe pour $\xi > 0$**

La loi de Fréchet a pour fonction de répartition $\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})$ ($x > 0$) ; il serait équivalent d'écrire : $\ln(\ln(\frac{1}{\Phi_\alpha(x)})) \simeq \alpha \ln(x) + \beta$. Autrement dit, $\ln(\ln(\frac{1}{\Phi_\alpha(x)}))$ est linéaire en $\ln(x)$. Il suffira alors de représenter $\ln(\ln(\frac{1}{\Phi_\alpha(x)}))$ en fonction de $\ln(x)$.

• **Graphe pour $\xi = 0$**

La loi de Gumbel a pour fonction de répartition $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$; il serait équivalent d'écrire : $\ln(\ln(\frac{1}{\Lambda(x)})) \simeq \alpha x + \beta$. Autrement dit, $\ln(\ln(\frac{1}{\Lambda(x)}))$ est linéaire en x . Il suffira alors de représenter $\ln(\ln(\frac{1}{\Lambda(x)}))$ en fonction de x .

Dans cette étude, les lois du maximum qui nous intéresseront seront dans le domaine d'attraction de Fréchet, avec un indice des valeurs extrêmes strictement positif car sa queue lourde permet de modéliser la loi des coûts des sinistres graves.

3.1.2 Excès au-dessus d'un seuil

Ici, nous nous intéressons à la loi des observations qui dépassent un seuil. Cette approche a été proposée suite aux critiques de l'approche précédente. En effet l'approche par « distribution du maximum » tient compte d'une seule observation (la plus grande), de ce fait il y a alors une perte de l'information apportée par l'ensemble des grandes valeurs.

Définitions

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F . On appelle fonction « probabilité d'excès » de X , la fonction $\bar{F}$ définie par :

$$\bar{F}(u) = \mathbb{P}(X > u) = 1 - F(u)$$

En analyse de survie, cette fonction est appelée fonction de survie modélisée par X (définie sur l'ensemble des réels positifs).

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi F . Soit un seuil $u > 0$; la distribution conditionnelle de survie au delà du seuil u est définie par :

$$\bar{F}_u(x) = \mathbb{P}(X - u > x | X > u) = \frac{\bar{F}(x + u)}{\bar{F}(u)}$$

L'espérance mathématique conditionnelle

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u), u \geq 0$$

est appelée fonction « excès moyen » de X au-dessus du seuil positif u .

Pour un seuil u approprié, les observations $(X_i - u)_+, i = 1, \dots, n$ sont caractérisées par une distribution de Pareto généralisée.

Distribution de Pareto Généralisée

La loi de Pareto Généralisée à deux paramètres β et ξ et notée $GPD(\beta, \xi)$ est définie par la fonction de répartition : $G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - [1 + \xi(x/\beta)]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$

Elle est définie sur $[0, +\infty[$ si $\xi > 0$ et sur $[0, -\beta/\xi[$ si $\xi < 0$.

Le seuil u doit être suffisamment grand pour qu'il y ait convergence de la loi des dépassements vers une GPD, mais il doit aussi être suffisamment petit pour qu'il y ait un nombre suffisant d'observations pour bien estimer les paramètres de la GPD.

Quelques propriétés la Distribution de Pareto Généralisée

- Si $X \sim GPD(\beta, \xi)$ et $\xi < 1$, alors $E(X) = \frac{\beta}{1-\xi}$
- Si $X \sim GPD(\beta, \xi)$ et $\xi < 1$, alors $X - u | X > u \sim GPD(\beta + \xi u, \xi)$ et $E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1-\xi}$. Cette propriété signifie tout simplement que lorsqu'il y a convergence vers une GPD, la fonction de dépassement moyen $e(u) = E(X - u | X > u)$ est linéaire de pente $\frac{\xi}{1-\xi}$.
- **Seuil stabilité** : si pour un seuil u , $(X - u)_+ \sim GPD(\beta_u, \xi)$, alors $\forall v \geq u$, $(X - v)_+ \sim GPD(\beta_v, \xi)$ avec $\beta_v = \beta_u + \xi(v - u)$

Théorème de Pickands

Une distribution F appartient au domaine d'attraction d'une loi GEV de paramètre de forme ξ si et seulement s'il existe une fonction positive $\beta(\cdot)$ telle que :

$$\sup_{0 < x < X^F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| \xrightarrow{u \rightarrow x^F} 0$$

Où $X^F = \sup\{x/F(x) < 1\}$

En d'autres termes, pour un seuil assez grand, la loi de Pareto généralisée est une bonne approximation de la loi des excès. Ainsi, en choisissant un seuil convenable, une loi de Pareto généralisée pourra être ajustée aux montants des sinistres dépassant ce seuil.

Liens entre la Distribution de Pareto Généralisée et la distribution GEV

Soient $\xi, x \in \mathbb{R}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- P1) Il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\mathbb{P}(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_\xi(x)$
- P2) Il existe une fonction $a(\cdot)$ telle que :

$$\mathbb{P}(\frac{X - u}{a(u)} \geq x) \xrightarrow{u \rightarrow x^F} \begin{cases} [1 + \xi(x)]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

- P3) Il existe une fonction positive $\beta(\cdot)$ telle que :

$$\sup_{0 < x < X^F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| \xrightarrow{u \rightarrow x^F} 0$$

De l'équivalence de ces propositions, il en découle que l'indice de queue ξ est le même que l'on utilise une approche GEV ou une approche GPD.

3.2 Estimation de l'indice de queue

L'indice de queue ξ contient l'information sur l'épaisseur de la queue de distribution. Il donne donc une indication sur l'importance des risques extrêmes pour une distribution. C'est pourquoi, il est bien de l'estimer. Comme mentionné ci-haut, dans cette étude, on préférera une approche GPD à une approche GEV.

3.2.1 Estimation par maximum de vraisemblance

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition (commune) F . Soit k le nombre d'excès obtenus avec un seuil u et $Y_1, \dots, Y_k$ les excès associés. On montre que la log-vraisemblance des excès par rapport à une GPD(β, ξ) s'écrit :

$$\log L = -k \log \beta - (1 + \frac{1}{\xi}) \sum_{i=1}^k \log(1 + \xi \frac{Y_i}{\beta})$$

Ayant cette équation, les valeurs estimées de ξ et β s'obtiennent en résolvant le système d'équation obtenu à la suite de l'annulation des dérivées partielles de la log-vraisemblance. Lorsqu'il n'est pas possible d'avoir une expression explicite, on fait recours à des algorithmes de résolution numérique².

2. Dichotomie, Newton- Raphson

3.2.2 Estimateur de Hill

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition F . Soit $X_{i,n}$ la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre de l'échantillon de taille n . On s'intéresse aux k plus grandes valeurs de notre échantillon ($X_{k,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$). L'estimateur de Hill est donné par :

$$\xi_{k,n}^{Hill} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln\left(\frac{X_{n-j+1,n}}{X_{n-k,n}}\right)$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$ et $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ on montre cet estimateur converge vers une loi normale. En effet,

$$\sqrt{k}(\xi_{k,n}^{Hill} - \xi) \rightarrow N(0, \xi^2)$$

Remarque :

L'estimateur de Hill n'est valable que pour le domaine d'attraction de Fréchet ($\xi > 0$).

L'estimateur de Hill présenté ci-dessus est fonction du nombre d'excès k à considérer qui est lié au choix du seuil u qui, si très élevé, conduirait à une estimation peu robuste des paramètres de la GPD ; par contre si u n'est pas suffisamment élevé, l'approximation de la loi des excès par une GPD risque d'être mauvaise.

3.3 Méthodes de détermination du seuil de sinistre grave

Il existe dans la littérature de nombreux moyens de trouver le seuil à partir duquel l'on peut considérer qu'un sinistre est grave. De ce fait, la distribution GPD est très utilisée pour modéliser les dépassements de seuils. Le point crucial est la détermination du seuil u qui doit être suffisamment grand pour qu'il y ait convergence de la loi des dépassements vers une GPD, mais il doit aussi être suffisamment petit pour qu'il ait un nombre d'observations suffisant pour bien estimer les paramètres de la GPD.

3.3.1 Le graphique des dépassements moyens ou Mean Excess Plot

Il s'agit ici de faire varier le seuil, de calculer à chaque fois le dépassement moyen et de tracer le graphique des dépassements moyen en fonction des différents seuils. Le seuil approprié est celui à partir duquel le graphique est approximativement linéaire. L'indice de queue s'en déduit par la relation : $a = \frac{\xi}{1-\xi}$; où a est la pente de la droite. Il est important de préciser qu'en pratique, une approximation du dépassement moyen $e(u)$ sur un échantillon $X_1, X_2, \dots, X_n$ est

$$\text{donnée par : } e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)_+}{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}}}.$$

Le graphe de $e(u)$ permet d'avoir une information sur la queue de distribution. En effet, si $e(u)$ est marqué par une pente positive, alors on a une distribution de type Pareto ; si $e(u)$ est horizontale, alors on a une distribution de type exponentielle.

3.3.2 AMSE (Asymptotic Mean Square Error)

Cette méthode consiste à retenir comme nombre d'excès approprié celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de Hill. En guise de rappel, l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur T_θ d'un paramètre θ est égale au carré du biais auquel on ajoute la variance ; ceci se traduit par :

$$E[T_\theta - \theta]^2 = [E(T_\theta) - \theta]^2 + Var(T_\theta)$$

On montre que : $Var(\xi_{k,n}^{Hill}) = \frac{(\xi_{k,n}^{Hill})^2}{k}$ et $E(\xi_{k,n}^{Hill}) = \xi + \frac{b_{k,n}}{1+\beta}$; où $b_{k,n}$ et β sont des paramètres. Il en découle que $AMSE(\xi_{k,n}^{Hill}) = \frac{(\xi_{k,n}^{Hill})^2}{k} + (\frac{b_{k,n}}{1+\beta})^2$ et $k_{optimal} = \underset{k}{argmin} AMSE(\xi_{k,n}^{Hill})$.

Le nombre d'excès approprié étant déterminé, on déduit le seuil u .

Ayant fini de présenter les éléments de la théorie des valeurs extrêmes utiles pour notre étude, nous allons maintenant les implémenter.

3.4 Application aux données

Dans cette partie, nous allons appliquer les différentes méthodes présentées précédemment pour déterminer le seuil qui sépare les sinistres attritionnels des sinistres graves.

Notation : Dans cette section, nous noterons 1 millier de Francs CFA par K.FCFA.

3.4.1 Quelques statistiques descriptives

Les éléments ci-dessous représentent quelques statistiques descriptives sur les données de sinistres retraitées de l'inflation et projetées à l'ultime.

Min	q(25%)	Médiane	Moyenne	q(75%)	Max	std	CoV
0	131 724	631 544	4 317 503	3 090 489	62 715 873	3 090 489	2.33

TABLE 3.1 – Quelques statistiques des sinistres corrigés

De ce tableau, il ressort que les coûts de sinistres varient de 0 à 62 715 873 Francs CFA et valent en moyenne 4 371 503 Francs CFA. Cependant, comme le coefficient de variation vaut 2.33 il y a une grande dispersion des données autour de la moyenne. La médiane quant à elle vaut 631 544 Francs CFA ce qui signifie que 50% des sinistres ont un coût inférieur à 631 544 Francs CFA.

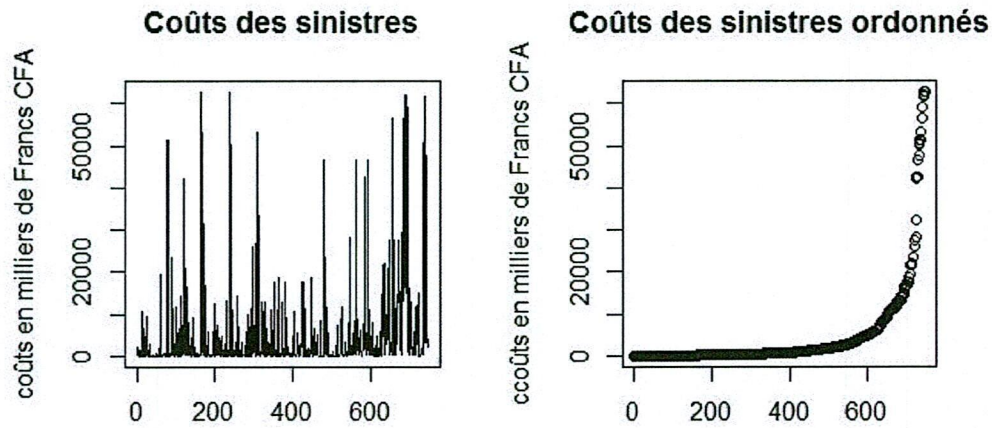


FIGURE 3.1 – Coûts individuels des sinistres en K.FCFA

Les deux graphiques ci-dessus donnent un premier aperçu de la série des coûts de sinistres. Sur la courbe de la série des coûts de sinistres ordonnés, la structure observée laisse présager que la queue de la distribution des données des coûts de sinistres est lourde. Il est fort probable que les données appartiennent au domaine d'attraction de Fréchet.

3.4.2 Détermination du domaine d'attraction

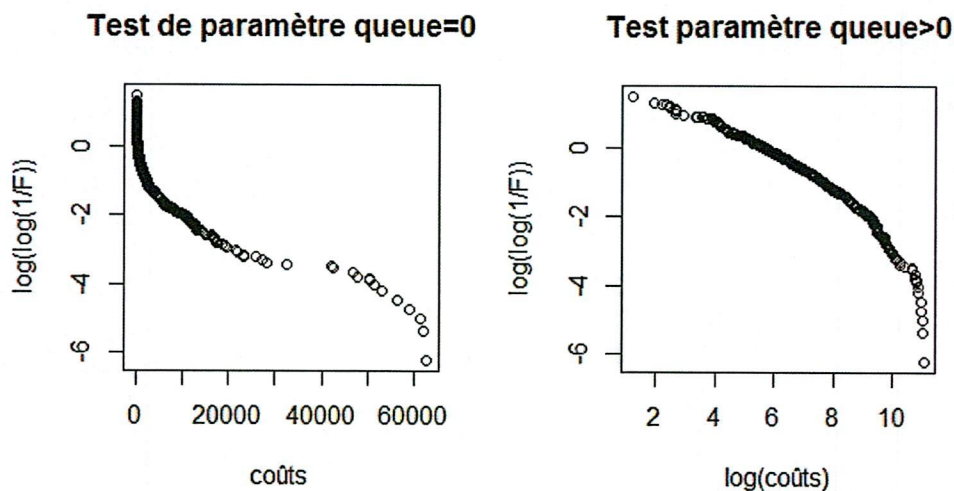


FIGURE 3.2 – Test sur le paramètre de queue

Des deux graphiques ci-dessus, il en ressort que :

- La première courbe est convexe, ce qui conduit au rejet de l'hypothèse selon laquelle $\xi = 0$
- Sur la deuxième courbe, on observe une quasi-linéarité entre $\ln(\text{coûts})$ et $\ln(\ln(1/F))$

Ainsi, nous confirmons le fait que la distribution de nos données a une queue lourde ($\xi > 0$). La loi de distribution des données appartient au domaine d'attraction de Fréchet. Nous pourrions

donc utiliser le critère AMSE qui se base sur l'estimateur de Hill, qui est valable uniquement dans le domaine de Fréchet.

3.4.3 Détermination du seuil de sinistre grave

Pour déterminer le seuil d'entrée dans la zone extrême, nous allons appliquer les méthodes explicitées ci-haut.

3.4.3.1 Le graphique des dépassements moyens

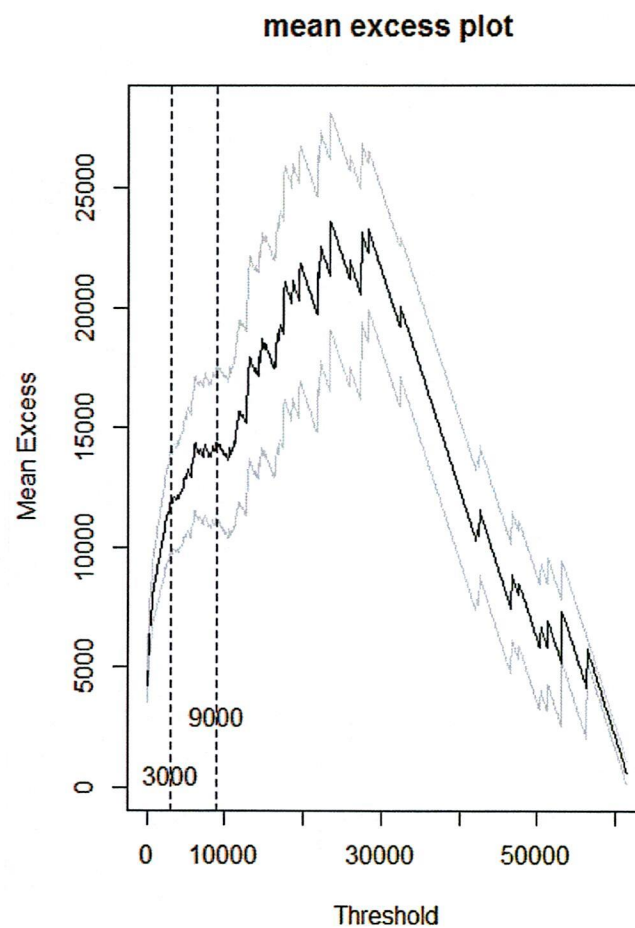


FIGURE 3.3 – Mean excess plot (coûts en K.FCFA)

La croissance rapide du mean excess plot observée pour les premiers seuils permet de confirmer la conclusion d'une queue lourde.

Nous avons deux seuils possibles de linéarité du Mean excess plot qui sont : 3 000 000, 9 000 000. Si un de ces seuils est retenu, alors tout seuil au-dessus est également valable (propriété

de seuil-stabilité).

3.4.3.2 L'AMSE

Le nombre d'excès pour lequel l'erreur quadratique de l'estimateur de Hill est minimisé est 185 qui correspond à un seuil de 3 164 600 qui n'est pas loing de celui obtenu avec le graphique des dépassements moyens.

Seuil retenu

Les différentes méthodes étudiées permettent d'affirmer que le seuil $u = 3\,000\,000$ serait adéquat.

Toutefois, ce seuil doit être validé.

3.4.3.3 Validation du seuil de sinistre grave retenu

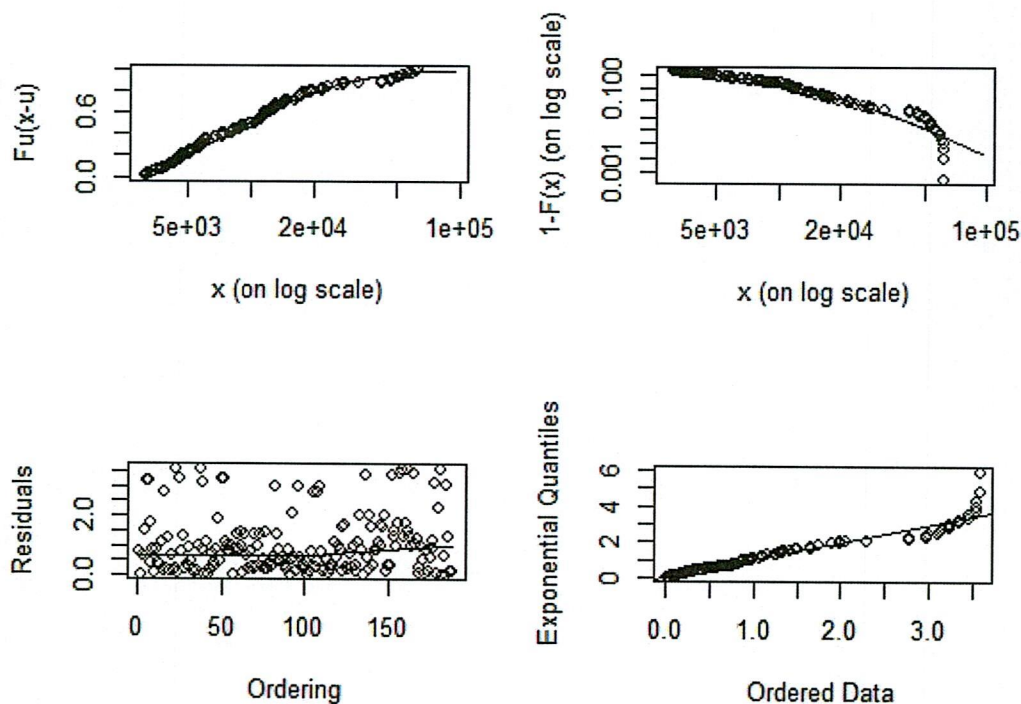


FIGURE 3.4 – Validation du seuil de sinistre grave

La loi GPD semble bien adaptée aux données; quant aux résidus, ils semblent purement aléatoires et aucune tendance particulière ne se décèle dans la série des résidus. Ceci confirme le fait que le seuil $u = 3\,000\,000$ permet de bien distinguer les sinistres graves des sinistres attritionnels.

MODÉLISATION DE LA SINISTRALITÉ

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé le seuil à partir duquel un sinistre est qualifié de sinistre grave. Il est dès lors possible de distinguer les sinistres attritionnels des sinistres graves. Les sinistres graves étant ceux dont le coût dépasse le seuil u .

Dans cette partie, il sera question de déterminer la loi qui modélise au mieux la volatilité de la sinistralité.

4.1 Définition du modèle : Le modèle collectif

La charge totale de sinistres S de la garantie responsabilité civile automobile est donnée par :

$$S = \sum_{i=0}^N X_i$$

où N est la variable aléatoire qui représente le nombre de sinistres de cette garantie et $(X_i)_{i \geq 1}$ la suite de variables aléatoires représentant ses montants individuels des sinistres.

Etant donné que nous avons les sinistres attritionnels et les sinistres graves, la charge totale S se décompose alors comme suit :

$$S = \sum_{i=0}^N X_i = S_{att} + S_{grave} = S_{att} + \sum_{i=0}^{N_{grave}} X_i^{grave}$$

Où :

- S_{att} est la charge de la sinistralité attritionnelle donnée par : $S_{att} = \sum_{i=0}^{N_{att}} X_i^{att}$; N_{att} est la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres attritionnels et X_i^{att} la charge du $i^{\text{ème}}$ sinistre attritionnel ;
- S_{grave} est la charge de la sinistralité grave ; elle est égale à $S_{grave} = \sum_{i=0}^{N_{grave}} X_i^{grave}$ avec N_{grave} la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres graves et X_i^{grave} la charge individuelle du $i^{\text{ème}}$ sinistre grave. Les variables aléatoires $(X_i^{grave})_{i \geq 1}$ sont supposées i.i.d et indépendantes de N_{grave} .

En générale, la même approche est utilisée pour les sinistres attritionnels et pour les sinistres graves. En effet, ces sinistralités sont toutes deux modélisées par une approche fréquence-coût. Néanmoins, l'approche qui sera retenue ici sera de modéliser la sinistralité attritionnelle de façon agrégée et la sinistralité grave de manière individuelle.

Le modèle retenu est alors :

$$S = \sum_{i=0}^N X_i = S_{att} + \sum_{i=0}^{N_{grave}} X_i^{grave}$$

4.2 Tests d'adéquation à une loi

Les tests d'adéquation à une loi sont utilisés pour juger de la compatibilité d'un échantillon avec une distribution donnée. Ainsi, pour effectuer un test d'adéquation à une loi, il est indispensable de disposer d'un échantillon ainsi que d'une loi de référence entièrement définie. Le test d'adéquation sera ensuite effectué pour vérifier si la loi de l'échantillon correspond bien à cette loi. Si les paramètres de la loi à tester ne sont pas connus, il conviendrait de les estimer au préalable. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour estimer les paramètres d'une loi ; les plus courantes sont la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance

4.2.1 Estimation des paramètres de la loi

4.2.1.1 Méthode des moments

La méthode des moments est un outil d'estimation intuitif qui date du début des statistiques. Elle consiste à estimer les paramètres recherchés en égalisant certains moments théoriques avec leurs contreparties empiriques. L'égalisation se justifie par la loi des grands nombres qui implique que l'on peut "approcher" une espérance mathématique par une moyenne empirique.

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition F qui dépend d'un paramètre $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$. Les estimateurs des moments des paramètres $\theta_1, \dots, \theta_p$ sont obtenus en égalant au moins les p premiers moments théoriques et les p premiers moments empiriques. Ceci se traduit par :

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

C'est une méthode d'estimation simple et intuitive, mais les estimateurs obtenus possèdent en général peu de belles propriétés par exemple, lorsque la taille de l'échantillon n'est pas suffisamment grande, la loi des grands nombres ne s'applique pas et par conséquent, les moments empiriques n'approchent pas suffisamment bien les moments théoriques.

4.2.1.2 Méthode du maximum de vraisemblance

En statistique, l'estimateur du maximum de vraisemblance est un estimateur statistique utilisé pour inférer les paramètres de la loi de probabilité d'un échantillon donné en recherchant les valeurs des paramètres maximisant la fonction de vraisemblance.

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition F qui dépend d'un paramètre $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$. Soit $x_1, \dots, x_n$ une réalisation de cette suite. La vraisemblance

de $F(\theta)$ sous l'échantillon $x_1, \dots, x_n$ s'écrit :

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

où f est la fonction de densité associée à F . On cherche la valeur de θ qui maximise la vraisemblance ou la log-vraisemblance ; pour cela, il faut résoudre le système d'équations obtenu en annulant des dérivées partielles de la log-vraisemblance par rapport aux composantes de θ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(L(\theta)) = 0, j = 1, \dots, p$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est calculé explicitement ; lorsqu'il n'est pas possible d'avoir une expression explicite, on fait recours à des algorithmes de résolution numérique¹.

Sous certaines hypothèses, l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement sans biais et convergeant ; de plus sa variance est minimale : c'est donc un estimateur performant.

Une fois estimés les paramètres de la loi à tester, des tests d'adéquation peuvent être effectués afin de vérifier si cette loi est sous-jacente à l'échantillon. Plusieurs tests d'adéquation ont été développés dans la littérature. La plus part d'entre eux sont basés sur la fonction de répartition empirique.

Au préalable, il est nécessaire de rappeler les définitions des fonctions de répartition théorique et empirique. Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition F . On rappelle que $\forall x, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. La fonction de répartition empirique associée est définie par $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leq x}$.

4.2.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

En statistique, le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'hypothèse utilisé pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée connue par sa fonction de répartition continue, ou bien si deux échantillons suivent la même loi. Ce test consiste à mesurer l'écart entre la fonction de répartition théorique et la fonction de répartition empirique.

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition commune F continue et inconnue. On se donne une fonction de répartition F_0 , supposée continue. On veut résoudre le problème de test suivant :

$$\begin{cases} H_0 : F = F_0 \\ H_1 : F \neq F_0 \end{cases}$$

La statistique de test est donnée par : $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)|$.

Pour un seuil α choisit, on rejette l'hypothèse H_0 si $D_n > d_{n,1-\alpha}$; où $d_{n,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la table de Kolmogorov-Smirnov.

1. Dichotomie, Newton- Raphson

4.2.3 Test d'Anderson-Darling

Ce test est basé sur la même logique que le test de Kolmogorov-Smirnov à savoir mesurer l'écart entre la fonction de répartition empirique et une fonction de répartition théorique connue. Sa particularité est qu'il fait intervenir l'écart quadratique $(F_n(x) - F_0(x))^2$. La statistique de ce test est de la forme :

$$Q_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 \Psi(x) dF_0(x)$$

où Ψ une fonction de pondération.

Dans le cas du test d'Anderson-Darling, la fonction de pondération est $\Psi(x) = \frac{1}{F_0(x)(1-F_0(x))}$ et la statistique de test est approximée par :

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln(F_0(X_{(i)})) + \ln(1 - F_0(X_{(n+1-i)}))]$$

Pour un seuil α , on rejette H_0 si $A_n^2 > a_{n,1-\alpha}$; où $a_{n,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la table d'Anderson-Darling.

La fonction de pondération utilisée dans le test d'Anderson-Darling donne plus de poids aux observations situées dans les queues de la distribution. Ce test est donc plus intéressant si on s'intéresse aux queues de distribution.

L'intérêt de la statistique d'Anderson-Darling est qu'elle prend en compte l'étendue de la distribution et notamment la queue de distribution (c'est-à-dire les sinistres de montants importants). Pour cette raison, le test d'Anderson-Darling est plus pertinent que le test de Kolmogorov-Smirnov dans le cas des sinistres graves, car ce test nous permettra de savoir si la loi statistique testée ajuste bien les queues de distribution.

Les tests présentés jusqu'à présent s'appliquent uniquement aux distributions continues. Dans le cas des distributions discrètes, le test le plus utilisé est le test du chi-deux d'adéquation à une loi. Cependant, ne disposant pas d'un historique assez long dans ce mémoire, le test du chi-deux ne serait pas robuste. Le critère du maximum de vraisemblance et le critère de minimisation des critères d'informations (AIC et BIC) seront utilisés pour faire le choix entre les distributions discrètes.

4.3 Modélisation

Dans cette section, nous allons appliquer à nos données les différentes méthodes d'estimations et les différents tests d'adéquation à une loi présentés à la section précédente afin de déterminer les lois qui modélisent au mieux la sinistralité.

4.3.1 Lois utilisées

En assurance non-vie, les principales quantités d'intérêt sont les coûts et fréquences des sinistres; ainsi, les lois de probabilités les plus utilisées sont celles à support positif.

4.3.1.1 Pour les coûts des sinistres

Les lois de probabilités les plus souvent utilisées pour modéliser les coûts des sinistres sont les suivantes :

- **Loi gamma** : elle a pour densité $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$; avec $x \geq 0$, $\alpha, \lambda > 0$ et Γ la fonction Gamma ;
- **Loi log-normale** : elle a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma})^2}$; avec $x, \sigma^2 > 0, \mu \in \mathbb{R}$. Si $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ alors $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$;
- **Loi weibull** : elle a pour densité $f(x) = \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\eta})^\beta}$; avec $x > 0, \eta, \beta > 0$;
- **loi GPD** : qui a été définie au chapitre précédent pour la modélisation de la sinistralité grave.

4.3.1.2 Pour la fréquence des sinistres

Les lois de probabilités les plus souvent utilisées pour modéliser la fréquence des sinistres sont les suivantes :

- **Loi de Poisson** : sa fonction de probabilité est $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; avec $\lambda > 0$ et $k \in \mathbb{N}$;
- **Loi binomiale négative** : elle est notée $BN(m, p)$ et a pour fonction de probabilité $\mathbb{P}(X = k) = \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k$; où $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.

L'ajustement aux données des lois présentées ci-dessus a été vérifié en implémentant les tests d'adéquation présentés précédemment. Nous présenterons dans la suite les résultats obtenus.

4.3.2 Modélisation de la sinistralité attritionnelle

4.3.2.1 Estimation des paramètres de la loi des coûts des sinistres

Les paramètres des lois ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-après :

Lois ajustées	Log-normale	Gamma	Weibull
Paramètre 1	14,81	5,28	1,68
Paramètre 2	0,66	1,64e-06	3831950
Log vraisemblance	-131,76	-131,51	-133,93
AIC	266,52	266,02	268,86
BIC	266,91	265,62	267,75

TABLE 4.1 – Estimation des paramètres des lois théoriques des coûts des sinistres attritionnels

La vraisemblance que les données des coûts des sinistres attritionnels soient issues d'une loi gamma est plus grande ; les critères d'informations AIC et BIC associés sont les plus petits. Ceci signifie que sur la base de ces critères, la loi gamma est celle qui ajuste le mieux les données des coûts des sinistres attritionnels.

Minimisation de la distance

Le tableau ci-dessous présente les résultats issus du calcul des distances entre la distribution empirique et les distributions théoriques estimées. Les métriques calculées sont : la distance de Kolmogorov-Smirnov et la distance d'Anderson-Darling.

Loi ajustée	Log-normale	Gamma	Weibull
Statistique du test de Kolmogorov S.	0,353	0,336	0,989
Statistique du test d'Anderson D.	1,18	0,897	27,5
P-value du test de Kolmogorov S.	0,28	0,33	5e-14
P-value du test d'Anderson D.	0,27	0,41	8,6e-05

TABLE 4.2 – Tests d'adéquation

Parmi les lois testées, la loi gamma est celle qui minimise les distances des tests de Kolmogorov et D'Anderson-Darling. De plus les p-valeurs des tests d'adéquation associés ne permettent pas de rejeter l'hypothèse d'adéquation à la loi gamma.

Choix de la loi

Ainsi, la loi choisie pour modéliser les données des coûts des sinistres attritionnels est la loi gamma de paramètres $\alpha = 5,28$, $\lambda = 1,64e - 06$.

4.3.2.2 Estimation des paramètres de la loi de fréquence des sinistres

Les paramètres des lois théoriques sur le nombre de sinistres attritionnels ont également été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-après :

Loi ajustée	Loi de Poisson	Loi Binomiale Négative
Paramètres	104,38	(72,001 ; 104,38)
Log vraisemblance	-246,67	-45,131
AIC	495,34	94,263
BIC	495,42	94,422

TABLE 4.3 – Estimation des paramètres de la loi du nombre de sinistres attritionnels

La vraisemblance que les données du nombre de sinistres attritionnels soient issues d'une loi binomiale négative est plus grande ; les critères d'informations AIC et BIC associés sont les plus petits. Ceci signifie que sur la base de ces critères, la loi binomiale négative est celle qui ajuste le mieux les données du nombre de sinistres attritionnels.

Choix de la loi

Ainsi, la loi choisie pour modéliser les données du nombre de sinistres attritionnels est la loi loi binomiale négative de moyenne 104,38 et d' écart type 72,001.

4.3.3 Modélisation de la sinistralité grave

4.3.3.1 Estimation des paramètres de la loi des coûts des sinistres

Les paramètres des lois ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-après :

Loi ajustée	Log-normale	Gamma	Weibull	GPD
Paramètre 1	16,15	1.53	1,48	1,01
Paramètre 2	0,81	1,03e-07	1,67e+07	3 135 083
Log vraisemblance	- 3294	- 3300.5	- 3306	- 3280,1
AIC	6564,3	6605,1	6616,1	6550,3
BIC	6570,8	6611,5	6622.66	6558,6

TABLE 4.4 – Estimation des paramètres des lois théoriques des coûts des sinistres graves

La vraisemblance que les données de coûts de la sévérité grave soient issues d'une loi GPD est plus grande ; les critères d'informations AIC et BIC associés sont les plus petits. Ceci signifie que sur la base de ces critères, la loi de Pareto Généralisée semble être celle qui ajuste au mieux les données des coûts de la sévérité grave.

Minimisation de la distance

Le tableau ci-dessous présente les résultats issus du calcul des distances entre la distribution empirique et les distributions théoriques estimées. Les métriques calculées sont : la distance de Kolmogorov-Smirnov et la distance d'Anderson-Darling.

Loi ajustée	Log-normale	Gamma	Weibull	GPD
Statistique du test de Kolmogorov S.	0,099	0,133	0,156	0,310
Statistique du test d'Anderson D.	2,72	6,63	7,96	22,9
P-value du test de Kolmogorov S.	0,068	0,0024	0,00021	2,7e-17
P-value du test d'Anderson D.	0,048	5e-04	0,00012	3,2e-06

TABLE 4.5 – Tests d'adéquation

La loi qui minimise les distances des tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling est la loi Log-normale. De plus, les p-valeurs des tests d'adéquation associés ne permettent pas de rejeter l'hypothèse d'adéquation à la loi Log-normale.

Tests graphiques

Les graphiques ci-dessous représentent l'histogramme et les densités théoriques, les fonctions de répartition théoriques et empiriques.

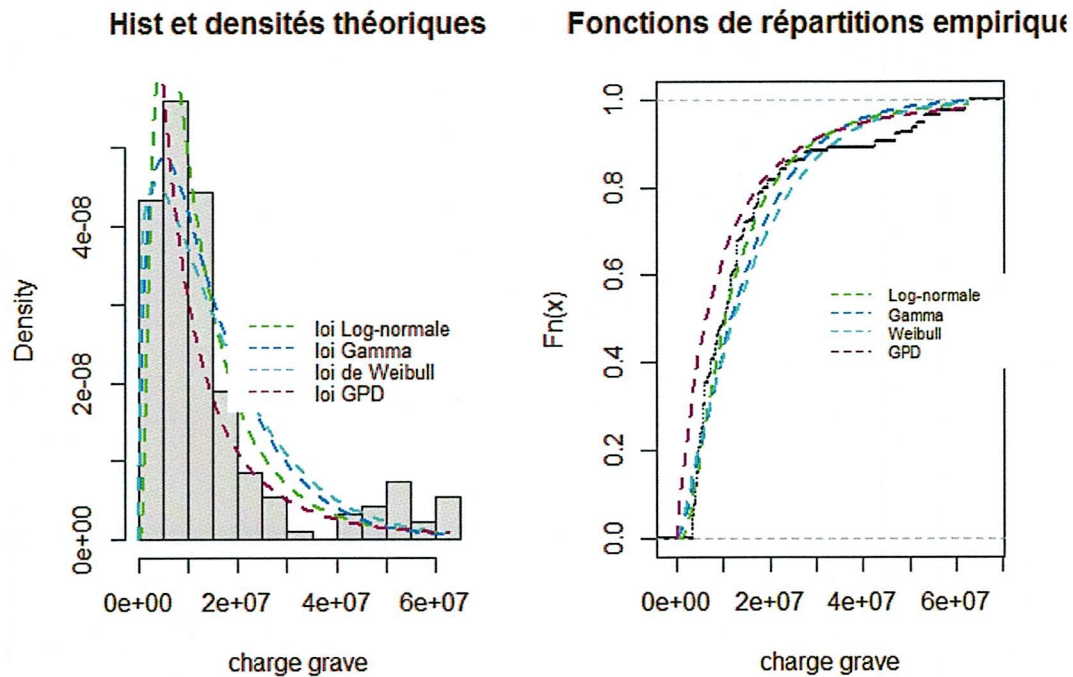


FIGURE 4.1 – Ajustement loi de la sévérité grave

Choix de la loi

Ainsi, la loi choisie pour modéliser les données des coûts des sinistres graves est la loi log-normale de moyenne 16,15 et d'écart-type 0,81

4.3.3.2 Estimation des paramètres de la loi de fréquence des sinistres

Les paramètres des lois théoriques sur le nombre de sinistres graves ont également été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-après :

Loi ajustée	Loi de Poisson	Loi Binomiale Négative
Paramètres	98,75	(64,62 ; 98,75)
Log vraisemblance	-153,37	-42,40
AIC	308,74	88,79
BIC	308,82	88,948

TABLE 4.6 – Estimation des paramètres de la loi du nombre de sinistres graves

La vraisemblance que les données du nombre de sinistres graves soient issues d'une loi binomiale négative est plus grande ; les critères d'informations AIC et BIC associés sont les plus petits. Ceci signifie que sur la base de ces critères, la loi binomiale négative est celle qui ajuste le mieux les données du nombre de sinistres graves.

Choix de la loi

Ainsi, la loi choisie pour modéliser les données du nombre de sinistres graves est la loi binomiale négative de moyenne 98,75 et d'écart type 64,62.

4.4 Démarche de simulation de la charge sinistre totale

Les lois qui ajustent au mieux la sévérité et la fréquence des sinistres attritionnels et ceux des graves étant trouvées, nous pouvons simuler différents scénarios possibles de charge de sinistre totale de la cédante par le procédé suivant :

- **Pour la charge de la sinistralité attritionnelle S_{att} :** Tout d'abord, on simule n scénarios possibles de fréquence et n scénarios possibles de coût des sinistres attritionnels. Ensuite, en faisant le produit de ces scénarios, nous avons n scénarios possibles de charge de sinistres attritionnels ;
- **Pour la charge de la sinistralité grave S_{grave} :** Tout d'abord, on simule n scénarios possibles de fréquence de sinistres graves. Ensuite, le montant des coûts individuels sera simulé de façon indépendante à un nombre de fois égal à la fréquence simulée auparavant.

En supposant l'indépendance entre la sinistralité attritionnelle et la sinistralité grave, la charge totale est obtenue en sommant ces deux charges. Nous aurons ainsi n scénarios possibles de charge de sinistre totale de la cédante aux quelles peuvent être calculés différents indicateurs tels que les quantiles empiriques.

COTATION ET OPTIMISATION DE LA RÉASSURANCE

La réassurance est une activité inconnue du grand public car l'assuré ne rentre jamais en contact avec le réassureur, et ne sait même pas que sa police d'assurance est réassurée. Au sein même des sociétés d'assurance, la relation avec le réassureur n'est maîtrisée que par un nombre réduit de collaborateurs. Cependant elle joue un rôle majeure dans la gestion des risques (partage des risques).

Le principal but de la réassurance pour un assureur est de diminuer son risque. La réassurance transforme ainsi la distribution de la perte de la Compagnie. Par exemple, avec un traité en excédent de sinistre, les gros sinistres sont pris (en partie) en charge par la réassurance.

Cependant, en cédant une partie de son risque au réassureur, la Compagnie cède également une partie de ses primes et donc de son résultat. Il faut trouver le juste milieu entre diminution du risque et cession du résultat. Ainsi, le but de cette partie est de proposer plusieurs approches permettant de comparer les stratégies de réassurance en fonction des objectifs de l'entreprise et de trouver la stratégie optimale répondant à chaque objectif. La stratégie de réassurance optimale doit combiner deux problématiques : Minimisation du risque et Maximisation du profit.

Rappelons que pour une branche d'assurance donnée le résultat technique net de réassurance de la cédante l'année $N + 1$ est donné par :

$$R_{net} = P - S + R_{réas} - F$$

avec

$$R_{réas} = S_{cédée} - P_{cédée}$$

où S est sinistralité de l'année $N+1$ modélisée par sa distribution ; P la prime acquise de l'année $N+1$, $P_{cédée}$ prime de réassurance, $S_{cédée}$ sinistralité cédée au réassureur.

5.1 Critères d'optimisation

La charge de sinistre de la compagnie est une variable aléatoire positive notée S . Pour chaque stratégie de réassurance, la partie cédée au réassureur est une fonction de S , notée f et définie de la façon suivante : $f(s) \in [0, s]$, $s \geq 0$, la partie cédée ne pouvant dépasser la charge de sinistre brute de réassurance. La charge de sinistre nette de réassurance s'écrit alors : $I_f(S) = S - f(S)$. La prime de réassurance est une fonction de $f(S)$ notée Π .

Le résultat est donc une variable aléatoire qui s'écrit en fonction de la stratégie adoptée et de la charge de sinistre et est donné par :

$$R_f(S) = PF - S + f(S) - \pi(f(S))$$

où PF est égale à l'assiette de prime moins les frais.

Notons qu'en moyenne, les primes cédées au réassureur sont logiquement supérieures à l'espérance de la partie cédée¹ c'est à dire $\pi(f(S)) > E(f(S))$

Nous avons donc

$$E(R_{\text{réas}}) = E(f(S)) - \pi(f(S)) < 0$$

Le résultat espéré de la cédante avec réassurance est donc toujours plus faible que sans réassurance. Autrement dit, si la cédante se base uniquement sur son résultat pour optimiser sa stratégie de réassurance, alors elle ne fera pas appel à la réassurance.

De même, si la Compagnie se base uniquement sur la minimisation du risque pour optimiser la stratégie de réassurance, alors la stratégie optimale sera de céder la totalité de la charge de sinistre. La Compagnie ne prendra dans ce cas aucun risque, mais elle cédera ses bénéfices au réassureur.

Ces deux cas extrêmes montrent bien la complémentarité entre risque et profit. La stratégie optimale ne peut, a priori, pas se réduire à tout céder ou alors à ne rien céder, mais elle doit tabler sur un juste milieu. Ainsi, dans cette étude, nous allons trouver la stratégie de réassurance optimale tout d'abord en maximisant le résultat espéré sous la contrainte que sa variance soit inférieure à un seuil donné.

Rappels sur le critère espérance-variance

Le résultat d'un assureur étant une variable aléatoire, elle possède donc une espérance et une variance. Chaque couple (Priorité, Portée) peut être représenté dans un graphique variance/résultat. On peut donc trouver un couple (Priorité, Portée) maximisant le résultat tout en minimisant le risque selon l'appétence. L'ensemble de ces couples est appelé frontière efficiente.

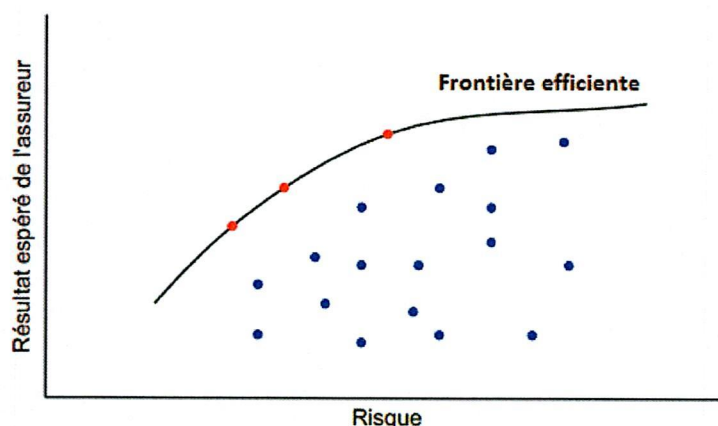


FIGURE 5.1 – Illustration de la frontière efficiente

1. puisque le réassureur ajoute ses frais et la commission des courtiers

5.2 Cotation des traités XS : Détermination de $P_{cédée}$

Rappelons que le modèle choisit pour la charge de sinistre est :

$$S = \sum_{i=0}^N X_i = S_{att} + \sum_{i=0}^{N_{grave}} X_i^{grave}$$

Nous supposons que la sinistralité attritionnelle n'est pas prise en charge par les traités en excédent de sinistre. Ainsi, nous allons donc appliquer la réassurance uniquement aux montants individuels des sinistres graves.

Pour chaque montant de sinistre grave, le montant à la charge du réassureur Y_i est :

$$Y_i = \min(\text{Portée}, \max(X_i^{grave} - \text{Priorité}, 0))$$

Nous avons alors

$$S_{cédée} = \sum_{i=0}^{N_{grave}} Y_i$$

La problématique est alors d'estimer $\pi(\text{Priorité}, \text{Portée}) = E(S_{cédée})$.

Ils existent plusieurs méthodes permettant d'estimer cette prime pure de réassurance.

5.2.1 La méthode de Burning Cost

La méthode de Burning Cost utilise la sinistralité (statistiques de primes et de sinistres) observée dans le passé sur plusieurs années (de 5 à 10 ans) comme reflet du portefeuille à réassurer. La première étape est de corriger les montants des sinistres et des primes de l'inflation. Cette correction permet de trouver les montants de primes qui auraient été émises l'année de cotation pour une couverture semblable à celles des années de l'historique. Puis, il faut calculer le taux de Burning Cost, noté BC .

Si on note par n le nombre d'années d'observation, $S_{i,j}$ le montant du i -ème sinistre de l'année j , n_j le nombre de sinistres observés l'année j , C_j le montant total des sinistres à la charge du traité à tarifier l'année j , P_j le total des primes perçues par l'assureur l'année j , alors

$$BC = \frac{\sum_{j=0}^n C_j}{\sum_{j=0}^n P_j}$$

où

$$C_j = \sum_{i=1}^{n_j} \min(\text{Portée}, \max(S_{i,j} - \text{Priorité}, 0))$$

La prime pure de cession est obtenue en multipliant l'assiette de prime de l'année à coter par le taux de Burning Cost.

La méthode de Burning Cost suppose que les données disponibles du passé reflètent bien le futur, ce qui n'est généralement pas le cas en raison des changements dans les politiques de souscription.

5.2.2 La méthode Probabiliste

La méthode probabiliste utilise le modèle fréquence-coût. Elle consiste à trouver, à partir des données d'expérience, les distributions des fréquences et des sévérités du risque de la cédante. A partir de ces lois, l'estimation du tarif sera possible soit par une formule soit par simulation. Nous avons :

$$S_{cédée} = \sum_{i=0}^{N_{grave}} Y_i$$

La prime pure est alors d'estimée par

$$\pi(Priorité, Portée) = E(S_{cédée}) = \sum_{i=0}^{N_{grave}} Y_i = E(N_{grave})E(Y_i)$$

(En supposant l'indépendance entre la fréquence et les montants des sinistres)

5.2.3 Tarification par simulation

La tarification par simulation utilise la loi de fréquence et la loi du montant des sinistres. on génère des scénarios possibles de charge de sinistre et on calcule la charge du réassureur dans chaque scénario. La prime demandée sera la moyenne des charges des différents scénarios.

La tarification par simulation offre quelques avantages : En utilisant des simulations, on peut soumettre les traités à différents scénarios de stress pour essayer de quantifier l'impact des gros sinistres dans le portefeuille des assureurs. C'est la principale raison pour laquelle la simulation est la méthode la plus répandue dans la réassurance.

Le principal désavantage de cette méthode est la quantité de temps-machine qui doit être investi.

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons utiliser la méthode par simulation pour la détermination de la prime de cession, car nous ne disposons pas assez d'arguments pour justifier le fait que les données disponibles du passé reflètent bien le futur (la méthode de Burning Cost).

Calcul de la prime technique—prime commerciale

La prime technique correspond à la prime pure à laquelle s'ajoute un chargement de sécurité pour tenir compte du risque porté par le réassureur.

$$prime\ technique = prime\ pure + chargement\ de\ sécurité$$

La prime commerciale permet de tenir compte des frais du réassureur qui s'expriment généralement par un taux, noté ici β , appliqué à la prime technique. La prime commerciale s'écrit :

$$prime\ commerciale = \frac{prime\ technique}{1 - \beta}$$

5.2.4 Application

Le graphique ci-dessous illustre la cotation du traité XS pour une portée donnée et pour différentes valeurs de la priorité.

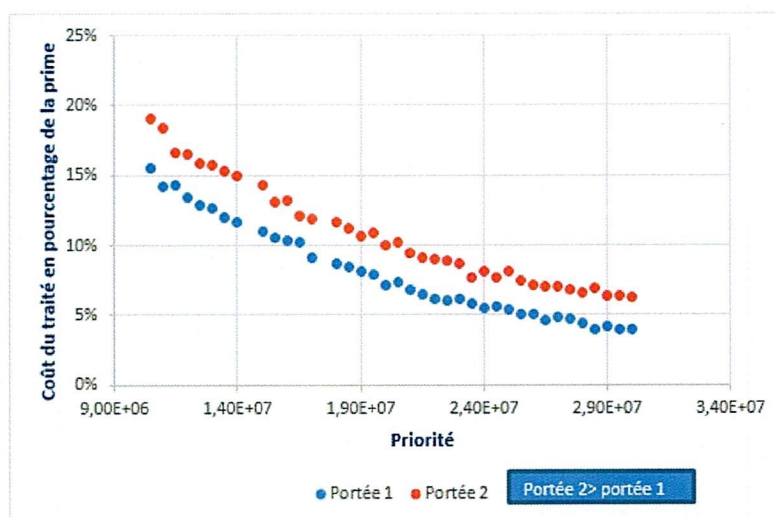


FIGURE 5.2 – Cotation du traité XS

Nous remarquons que le taux de cession diminue avec la croissance de l'engagement de la cédante (croissance de la priorité) et augmente avec la croissance de l'engagement du réassureur (augmentation de la portée).

Il est à noter que dans le cas où il y'a une clause de franchise annuelle et une clause d'engagement maximal annuel, nous avons

$$S_{cédée}^{ADD, ALL} = \min(\max(S_{cédée} - ADD; 0); ALL)$$

5.3 Optimisation du coût de la réassurance

Dans cette section, il s'agit de comparer la charge de sinistre réassurée à celle non réassurée. Rappelons qu'en ce qui concerne la garantie d'étude² est souscrite le plan suivant :

	XS pool	XS 1	XS 2
Priorité	20 000 000	400 000 000	1 000 000 000
Portée	380 000 000	600 000 000	3 000 000 000
Taux de prime	3,30%	0,77%	0,18%

TABLE 5.1 – Structure de réassurance en place (RC Auto)

Le graphique ci-dessous représente une comparaison entre la charge de sinistre avant et après réassurance obtenue en appliquant le premier traité (tranche) XS pool.

2. Responsabilité civile automobile

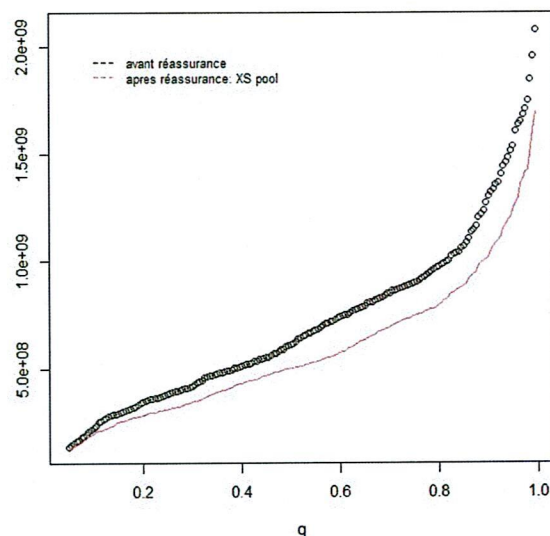


FIGURE 5.3 – Comparaison de la charge de sinistre avant et après réassurance sur le traité XS pool

Au regard du graphe ci-dessus, nous pouvons dire que l'effet de la réassurance sur la charge de sinistre de la cédante est croissante avec l'ampleur de la charge jusqu'au environ du quantile extrême à 90% où l'effet de la réassurance commence à diminuer jusqu'à finir par presque s'annuler.

α	95%	97%	98%	98.5%	99%	99.5%	99.7%
$VaR(X, \alpha)$ Avant réas	1536390	1682069	1750541	1847332	1958006	2079149	2115485
$VaR(X, \alpha)$ Après réas	1236372	1384769	1482389	1493660	1610778	1695225	1753913

TABLE 5.2 – VaR avant et après réassurance XS pool (en milliers)

Le graphique ci-dessous représente une comparaison entre de charge de sinistre avant réassurance et celle après réassurance obtenue en appliquant le plan complet de réassurance.

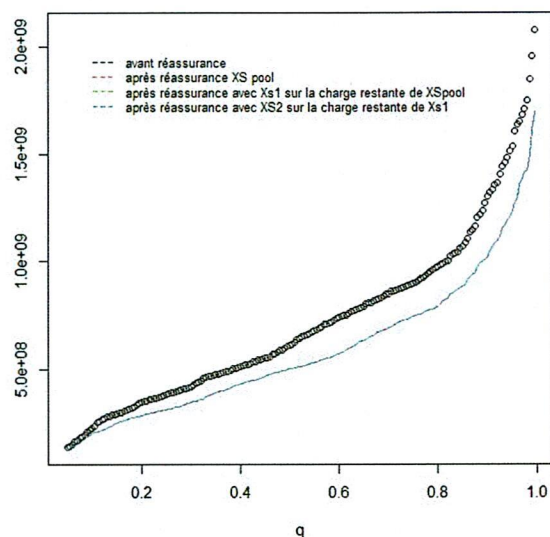


FIGURE 5.4 – Comparaison de la charge de sinistre avant et après réassurance sur les trois traités XS

D'après le graphique ci-dessus, nous remarquons que la tranche XS1 n'est jamais touchée. Ainsi, nous pouvons dire que le traité XS pool à lui seul couvre la cédante. La non souscription des deux autres tranches entraînerait une réduction d'environ 1 % du coût de la réassurance.

5.4 Optimisation des indicateurs

Dans cette section, nous allons tout d'abord étudier l'impact de la portée et de la priorité sur le résultat net espéré. Ensuite, nous allons proposer un traité de réassurance Xs optimal au sens espérance-variance.

Le tableau ci-dessous représente quelques indicateurs obtenus avec le programme de réassurance actuel.

Résultat espéré	Ecart type du résultat	Volatilité du résultat (CV)
560 503 766	200 771 045	35,8%

TABLE 5.3 – Quelques indicateurs obtenus avec la réassurance actuelle

5.4.1 Impact de la rétention et de la portée

Impact de la rétention

Le tableau ci-dessous représente quelques indicateurs obtenus en fixant la portée à 380 000 000 et en faisant varier la priorité de 15 000 000 à 30 000 000.

Priorité	Résultat espéré	Ecart type du résultat	Volatilité du résultat (CV)
15 000 000	540 616 942,1	185 090 361,2	34,2%
16 000 000	545 256 879,2	187 278 873,1	34,3%
17 000 000	550 951 044,5	191 712 228,3	34,8%
18 000 000	551 717 134,4	196 278 873,1	35,6%
19 000 000	557 010 445,6	198 392 946,9	35,6%
20 000 000	560 503 766,0	200 771 045,0	35,8%
21 000 000	561 931 338,8	202 712 228,3	36,1%
22 000 000	568 634 798,9	213 650 985,0	37,6%
23 000 000	557 010 445,6	220 075 106,3	39,5%
24 000 000	570 197 320,5	244 039 828,9	42,8%
25 000 000	571 338 858,1	254 948 954,3	44,6%
26 000 000	574 000 138,5	260 463 125,6	45,4%
27 000 000	585 738 052,7	263 548 615,3	45,0%
28 000 000	589 779 007,0	263 605 857,5	44,7%
29 000 000	590 996 871,4	264 743 529,4	44,8%
30 000 000	594 184 900,9	268 492 945,9	45,2%

TABLE 5.4 – Impact d’une variation de la rétention sur les indicateurs

Un accroissement de la rétention entraîne une augmentation des indicateurs de profit et des indicateurs de risque. Si la cédante cherche une optimisation de la volatilité du résultat alors on peut définir une rétention de 15 000 000 (contre 20 000 000 actuellement).

Impact de la portée

Le tableau ci-dessous représente quelques indicateurs obtenus en fixant la priorité à 20 000 000 et en faisant varier la portée de 250 000 000 à 400 000 000.

Portée	Résultat espéré	Ecart type du résultat	Volatilité du résultat (CV)
250 000 000	588 530 618,5	247 344 198,8	42,0%
260 000 000	586 467 207,1	242 587 511,9	41,4%
270 000 000	581 241 033,3	241 646 940,4	41,6%
280 000 000	580 441 574,5	239 696 572,9	41,3%
290 000 000	578 203 016,1	239 233 027,2	41,4%
300 000 000	575 441 574,5	236 941 608,2	41,2%
310 000 000	570 422 960,5	234 346 075,8	41,1%
320 000 000	568 460 160,2	229 986 952,9	40,5%
330 000 000	567 088 250,5	229 375 922,9	40,4%
340 000 000	566 138 250,5	223 176 756,8	39,4%
350 000 000	565 315 968,3	219 342 368,8	38,8%
360 000 000	563 117 936,3	212 784 714,1	37,8%
370 000 000	561 529 581,3	207 014 463,7	36,9%
380 000 000	560 503 766,0	200 771 045,0	35,8%
390 000 000	560 148 407,7	200 676 702,6	35,8%
400 000 000	559 976 707,5	199 948 477,4	35,7%

TABLE 5.5 – Impact d’une variation de la portée sur les indicateurs

Un accroissement de la portée entraîne une diminution des indicateurs de profit et des indicateurs de risque. Si la Cédante cherche une optimisation de la volatilité du résultat alors on peut définir une portée de 400 000 000 (contre 380 000 000 actuellement).

5.4.2 Programmes optimaux et résultats

Le but de cette partie est de comparer les stratégies de réassurance à partir des indicateurs pour définir la stratégie la mieux adaptée aux objectifs de la cédante.

Les indicateurs ont été calculés pour plusieurs de programmes de réassurance en faisant varier la priorité et la portée.

5.4.2.1 Résultat espéré et volatilité

Le couple espérance-écart type ou espérance-volatilité du résultat permet de faire comparaison entre les programmes. Si P_1 et P_2 sont deux programmes de réassurance différents donnant respectivement les résultats R_1 et R_2 alors le programme P_1 est meilleur que P_2 que nous notons $P_1 \succeq P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} E(R_1) \geq E(R_2) \\ \text{Var}(R_1) \leq \text{Var}(R_2) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} E(R_1) \geq E(R_2) \\ \text{Volatilité}(R_1) \leq \text{Volatilité}(R_2) \end{cases}$

Un programme P est optimal si et seulement s'il n'existe aucun programme P' tel que $P' \succeq P$.

L'ensemble des programmes optimaux forme la frontière efficiente.

Les figures ci-dessous représentent respectivement le nuage de points entre le résultat espéré et l'écart type du résultat, le nuage de points entre le résultat espéré et la volatilité du résultat.

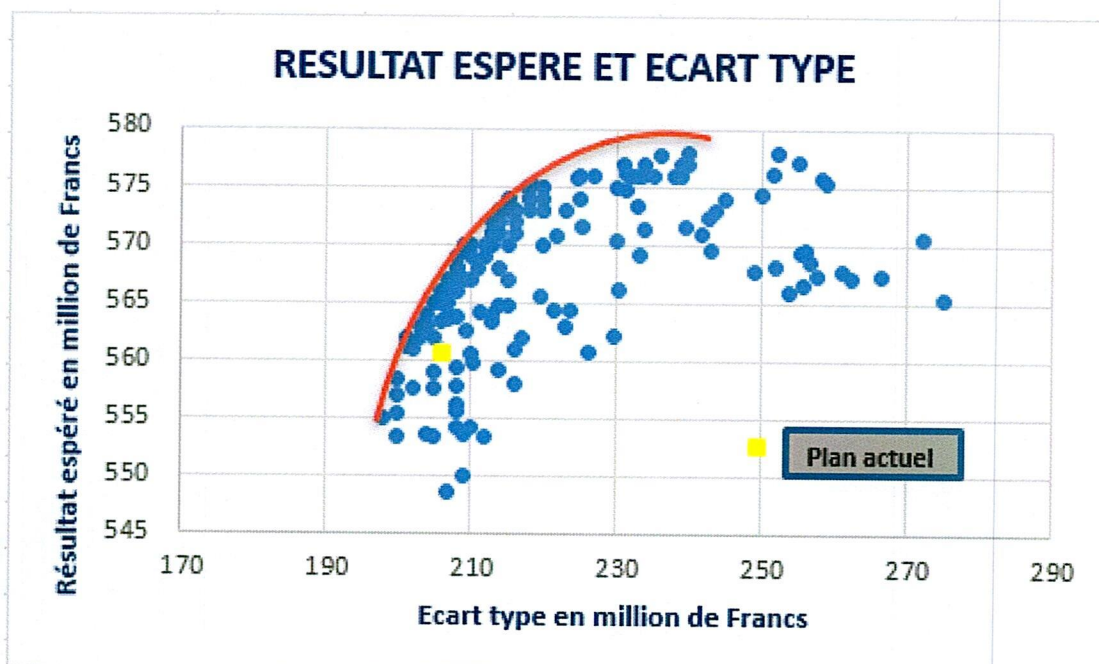


FIGURE 5.5 – Nuage de points espérance/écart type du résultat avec les programmes testés

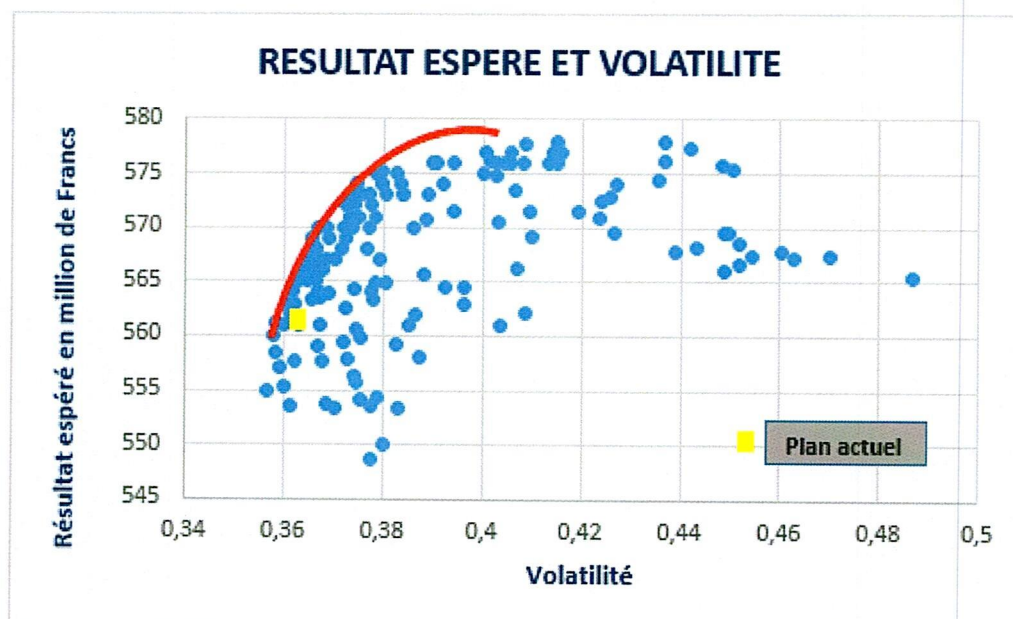


FIGURE 5.6 – Nuage de points espérance/volatilité du résultat avec les programmes testés

Chaque point du graphique correspond à un plan de réassurance XS. Le programme actuel ne se pas trouve sur la frontière efficiente.

Il existe deux façons de sélectionner un programme à partir du couple espérance-volatilité :

- Fixer un résultat espéré minimum et sélectionner le programme offrant la plus petite volatilité ;
- Fixer une volatilité maximum et sélectionner le programme offrant le plus grand résultat espéré.

5.4.2.2 Programmes optimaux

Dans la section précédente nous avons construit des graphiques où chaque point correspond à un plan de réassurance XS. La frontière d'efficacité permet de sélectionner le programme correspondant à l'objectif établi dans le plan stratégique. Ainsi en fonction de son appétence au risque, la cédante a à sa disposition un traité XS (Priorité et Portée) lui donnant un résultat espéré maximal.

Le traité de réassurance XS de la cédante ne se trouvant pas sur la frontière d'efficacité, le traité ci-dessous donne un meilleur résultat espéré tout en gardant le même écart type du résultat espéré.

Plan actuel

Priorité	Portée	Résultat espéré	Ecart type du résultat	Volatilité du résultat	Taux de prime
20 000 000 ↑	380 000 000 ↑	560 503 766 ↑	200 771 045 ↑	35,82% ↓	3,30% ↓
25 000 000 ↓	390 000 000 ↓	569 628 863 ↓	200 771 045 ↓	35,25% ↓	2,70% ↓

TABLE 5.6 – Exemple d'un plan optimal

Limites de l'étude

Aucune étude n'étant parfaite, nous avons identifié une limite relative à notre étude :

Lors de la simulation de la charge de sinistre totale, nous avons supposé qu'il y'a indépendance entre la sinistralité attritionnelle et celle grave. Or une année avec beaucoup de sinistres attritionnels est une année qui comporte aussi un nombre important de sinistres graves. Lorsque ces deux types de sinistralité sont modélisés séparément, une approche possible serait de les agréger en modélisant la structure de dépendance par une copule de dimension deux en considérant que ce sont les nombres de sinistres qui sont source de dépendance. Cette t'étude sera faite dans le suite pour l'amélioration des résultats obtenus.

Conclusion

Ce mémoire avait pour objectif la modélisation de la sinistralité non vie, la cotation des traités de réassurance et une proposition d'optimisation du programme de réassurance en ce qui concerne la garantie Responsabilité Civile automobile.

La première partie de ce mémoire consistait à la modélisation de la sinistralité. Etant donné que le portefeuille de sinistres historiques était très hétérogène, il a d'abord fallu à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes de faire une séparation du portefeuille en sinistres attritionnels et sinistres graves.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés au pilotage du programme de réassurance non-proportionnelle et plus précisément sur le traité excédent de sinistre (XS). Le principal but de la réassurance est de diminuer le risque de la Compagnie en cédant une partie de ses pertes en cas de forte sinistralité. Cette cession du risque est subordonnée par le paiement d'une prime de réassurance. Il a donc fallu tarifier les traités XS par la méthode de simulation de Monte Carlo. Une comparaison de l'effet des différents traités sur la sinistralité réassurée à celle non réassurée a permis de voir que la décante peut juste souscrire le traité XS Pool pour la garantie responsabilité civile automobile. La non souscription des deux autres tranches entrainerai une réduction d' environ 1 % du coût de la réassurance.

En cédant une partie de son risque au réassureur, la compagnie cède également une partie de son résultat espéré. Elle doit alors planifier sa stratégie de réassurance en prenant en compte à la fois la diminution du risque et la cession du résultat espéré. Son intérêt est alors de maximiser son résultat tout en minimisant son risque. Nous avons donc défini un certain nombre d'indicateurs permettant de mesurer le risque (la Volatilité) et la rentabilité (Résultat espéré). A partir de la méthode de Monte Carlo, ces indicateurs ont été estimés sur plusieurs programmes de réassurance en XS en faisant varier la priorité et portée. Il est donc important que la Compagnie fixe ses objectifs et son appétence au risque qui définiront ensuite la stratégie de réassurance optimale.

Références Bibliographiques

Ouvrages

- Arthur Charpentier et Christophe Dutang. L'actuariat avec R (2012).
- Albrecher, Hansjörg Beirlant, Jan Teugels, Jef. Reinsurance actuarial and statistical aspects (2017).
- SABOURIN Anne. Introduction à la théorie des valeurs extrêmes (2012).

Publications

- Code des assurances de la zone CIMA.
- Fun Cai and Ken Seng Tan. optimal retention for a stop-loss reinsurance under the var and cte risk measures (2007).

Mémoires

- Mickael ITTAH. Calibrage de la sinistralité non vie – Cotation et optimisation de la réassurance nonproportionnelle (2016).
- Stanislas Ray. Optimalité des structures de réassurance (2011).
- Paul BOUYSSOUNOUSE. Optimisation d'un traité en excédent de sinistre par tête (2015).
- CHEN Yan. Détermination des programmes de réassurance optimaux d'une société d'assurance non-vie dans le cadre de Solvabilité II (2018).
- Emilie Deprey et Alexandre Godzinski. Problématique de seuil dans la modélisation de la sinistralité en Réassurance Non Vie (2007).
- Vincent GOURMELON. Modélisation des sinistres graves en assurance automobile responsabilité civile (2014).

Annexes

Annexe 1 : Rappel sur le modèle de risque collectif

Le modèle de risque collectif considère le montant total des sinistres d'un portefeuille composé de plusieurs polices homogènes. Une police peut donner lieu à plusieurs sinistres. Si les X_i sont les montants des sinistres individuels et N est le nombre total de sinistres pour toutes les polices du portefeuille, alors le montant agrégé est donné par : $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- Les montants des sinistres X_i sont indépendants et identiquement distribués ;
- le nombre de sinistres N est indépendant des X_i .

De ce modèle découle la formule fréquence / sévérité utile dans le calcul des primes pures. Nous avons le résultat suivant : $E(S) = E(N)E(X)$

En effet :

$$E(S) = E[E(S/N)] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)E(S/N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

D'où

$$E(S) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)nE(X) = E(N)E(X)$$

Annexe 2 : Lois estimées

Les paramètres des lois utilisées renvoient aux définitions suivantes :

- Poisson : λ = fréquence ;
- Binomiale négative : n = nombre de succès attendu, p = probabilité du succès ;
- Pareto : a = échelle ("scale" en anglais), α = forme ("shape" en anglais) ;
- Weibull : a = échelle ("scale" en anglais), β = forme ("shape" en anglais) ;
- Gamma : α = forme ("shape" en anglais), λ = échelle ("scale" en anglais) ;
- LogNormale : μ = log-échelle ("log-scale" en anglais), σ = forme ("shape" en anglais).

L'estimation des paramètres est basée sur la méthode du maximum de vraisemblance. Il est à noter que les paramètres de fréquence sont tronqués afin d'être des entiers naturels.