

INSTITUT DE SCIENCE
FINANCIERE ET D'ASSURANCES



INSTITUT INTERNATIONAL
DES ASSURANCES



**RISQUE DE MODELE DANS LE
PROVISIONNEMENT D'UN CONTRAT
RESPONSABILITE CIVILE PROFESSIONNELLE**

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de
l'obtention d'un Master en Actuariat

PAR

TATSINKOU NDEFO LAUSIET

Matricule : IIA01ACT20

Sous la direction de :

ERIC MANIABLE

Actuaire senior et PDG du cabinet Intégral

Et de

ACHILE SIME

FIAF, FSA, MAA, CERA, AFFI, CAS, Principal/CEO at SL FINANCIAL

Année académique 2020-2021.

1^{ère} Promotion master actuariat IIA-ISFA

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

**Risque de modèle dans le provisionnement d'un
contrat responsabilité civile professionnelle.**

DEDICACES

À mes parents, **Mme NDEFO HENRIETTE** et **Mr SIGNE MAURICE**, qu'ils puissent voir en ce modeste travail, l'aboutissement de leur accompagnement depuis mon enfance jusqu'à la belle aventure à l'Institut International des Assurances. Je dédie également mon travail à l'administration de l'IIA et particulièrement à monsieur le directeur des études pour nous avoir si bien accompagner tout au long de notre parcours à l'institut, je le remercie infiniment, sa rigueur et son professionnalisme sont les valeurs qui font de cet institut l'une des meilleures en Afrique. Et en fin des remerciements à tous mes camarades, frères et amis de la promotion pour ses deux belles années passées ensemble riches en émotion.

REMERCIEMENTS

Avant toute chose, **L'Eternel Dieu** créateur du ciel et de la terre, pour le don de la vie et les grâces dont Il ne cesse de me combler chaque jour qui passe. Sa protection divine et la santé dont il me fait grâce chaque jour.

Je tiens tout d'abord à remercier l'**IIA** à travers son équipe dirigeante, notamment le directeur général **Urbain Phillipe ADJANON**, d'avoir cru en nous à travers un tel projet qui est très certainement l'un des meilleurs dans le monde. Qu'il continue à faire grandir le projet pour permettre le développement de l'actuariat en Afrique noir.

J'adresse mes remerciements **M. Éric MANIABLE** pour m'avoir donné l'opportunité de pratiquer ma passion à travers son cabinet **Intégral**. Je remercie particulièrement **M. Achille SIME** qui a toujours trouver du temps pour me conseiller et m'accompagner dans mes travaux.

Je tiens à remercier les membres du jury et les enseignants de l'Institut International des Assurances pour leurs enseignements, leurs lectures attentives de mon mémoire ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail. Je pense particulièrement au **Professeur FONO Louis Aimé**, au **Professeur FOTSO Siméon** et les autres enseignants.

Je leur exprime mes profonds remerciements pour leur disponibilité, les remarques très pertinentes, les lectures et les corrections de mon travail. Je tiens ici à leur exprimer ma gratitude et mon profond respect. Je ne saurais terminer sans saluer votre sens de motivation et d'encouragement.

En fin je remercie très sincèrement ma famille et amis pour avoir toujours été à mes côtés durant mes études jusqu'à l'aboutissement de ce travail. Ma réussite et mon succès n'ont tenu qu'à votre soutiens et conseils. Particulièrement à :

- Ma mère **KENGNE Henriette** et mon père **SOH SIGNE Maurice**.
- Mon oncle papa **NOUACHI Emile** et toute la grande famille.

TABLE DES MATIERES

DEDICACES.....	ii
REMERCIEMENTS.....	iii
RESUME	vii
ABSTRACT.....	viii
LISTE DES ABRÉVIATIONS.....	ix
LISTE DES FIGURES.....	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xi
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
CHAPITRE 1.....	2
RISQUE DE MODELE ET PROVISIONNEMENT EN RCPM	2
1.1 Différentes provisions techniques des compagnies d'assurance non-vie	2
1.1.1 Provisions techniques les plus usitées	2
a. La provision pour sinistres à payer.....	2
b. La provision pour risques en cours.....	3
1.1.2 Autres provisions techniques.....	4
a. La provision pour risques croissants.....	4
b. La provision pour égalisation.....	4
i. La provision mathématique des rentes	4
ii. La provision pour risque d'exigibilité.....	4
1.2 Risque de modèle.....	5
1.2.1 Définition du risque de modèle	5
1.2.2 Les différentes sources du risque de modèle	5
a. Le risque de spécification	6
b. Le risque d'implémentation	6
c. Le risque de traitement des données.....	7
d. Le risque d'estimation	7
e. Le risque d'application	7
1.3 Assurance responsabilité professionnelle médicale.....	8
1.3.1 Responsabilités encourues.....	8
1.3.2 Présentation de la garantie du contrat d'assurance responsabilité civile professionnelle médicale	9
CHAPITRE 2.....	11

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

<i>METHODES DE PROVISIONNEMENT ENVISAGEES</i>	11
2.1 Méthodes déterministes envisagées.....	11
2.1.1 Méthodes de Chain Ladder.....	11
a. La méthode de Chain-Ladder Standard	11
b. La méthode de London-Chain.....	13
2.1.3. Moindres carrés de De Vylder.....	14
2.2 METHODES STOCHASTIQUES ENVISAGEES.....	17
2.2.1 Le modèle récursif de Mack.....	17
2.2.2 Méthode de Munich Chain Ladder	22
2.2.3 Modèle Linéaire Généralisé (GLM)	24
2.2.4 Le modèle du Bootstrap.....	27
CHAPITRE 3.....	29
APPLICATION DES MODELES DE PROVISIONNEMENT.....	29
3.1 Présentation des données.....	29
3.1.1 Origine des données	29
3.1.2 Présentation des Variables et statistique descriptive.....	29
3.2 Analyse descriptive des données	30
3.2.1 Nettoyage de la base de données.....	30
3.2.2 Analyse descriptive : Evolution des règlements et des provisions par année d'inventaire.....	31
3.3 Application des méthodes à la base de données	34
3.3.1. Application des méthodes déterministes envisagées.....	34
a. Méthode Chain Ladder standard.....	34
b. Méthode London Chain.....	37
c. Méthode des moindres carrés de De Vylder.....	38
3.3.2 Application des méthodes stochastiques envisagées	39
a. Le modèle de Mack	39
b. Modèle Munich Chain Ladder	41
c. Modèle du GLM avec la fonction de lien Log normale.....	43
d. Modèle du Bootstrap.....	44
CHAPITRE 4.....	46
RISQUE DE MODELE EN PROVISIONNEMENT.....	46
4.1. Mesures de risque : Définitions et propriétés	46
4.1.1 La Value at Risk (<i>Var</i>).....	48

Thème : *Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.*

4.1.2 La Tail Value at Risk (TVaR).....	48
4.1.3 Choix de la mesure de risque	49
4.2 Quantification du risque de modèle :	49
4.2.1 Approche dite de « modèle de référence »	49
4.2.2 L'approche 'worst case'	50
4.3 Modèle retenu sur les données en 2003	51
4.4 Modèle retenu sur les données en 2007	54
CONCLUSION.....	56
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	57
ANNEXES.....	58

RESUME

Mots-clés : Provision, Responsabilité Civile Professionnelle, méthodes classiques, risque de modèle.

Au sein des organismes d'assurance, l'une des activités importantes est l'estimation des provisions techniques et notamment de la provision pour sinistre à payer (PSAP). Les PSAP sont de provisions destinées à permettre le règlement intégral des sinistres survenus mais non encore réglés.

Ce mémoire traitera d'une branche particulière de l'assurance : la branche Responsabilité Civile Professionnelle qui se caractérise notamment par le fait que les sinistres ont une durée de vie en moyenne plus élevée que dans les autres secteurs de l'assurance non-vie ce qui aura un effet sur le provisionnement comme nous aurons l'occasion de le voir.

Nous distinguerons dans le provisionnement deux types de provisions : les provisions pour sinistre à payer ou PSAP qui résultent d'une grille forfaitaire ou d'une expertise pour la branche Responsabilité Civile Professionnelle auxquelles doivent être ajoutées des provisions pour sinistres survenus mais qui n'ont pas encore été déclarées que l'on appelle tardifs ou IBNR.

Dans notre projet nous essayons de proposer une analyse critique du risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat de la branche Responsabilité Civile Professionnelle (RCP).

Cette étude s'appuie tout d'abord sur l'application pratique de quelques méthodes classiques de calcul de provisions reposant sur Chain Ladder et ses variantes stochastiques pour établir leur adéquation aux données d'un portefeuille Responsabilité Civile Professionnelle Médicale d'un assureur non-vie. Nous avons donc implémenté des procédés gérant la liquidation incomplète des triangles de règlements et celui des charges. Ensuite, les critères de validation des différentes méthodes ainsi que les techniques de quantification du risque liée au choix d'un modèle des réserves. Ensuite Nous nous sommes concentrés sur l'évaluation du risque à partir du modèle notamment les éléments de quantification du risque de modèle. Enfin nous avons choisi les modèles qui s'adaptent mieux aux données en 2003, et 2007.

ABSTRACT

Key words : Provision, Professional Civil Liability, classic methods, model risk

Within insurance organizations, one of the important activities is the estimation of technical provisions and in particular the provision for claims payable (PSAP). PSAPs are provisions intended to allow the full settlement of claims that have arisen but not yet paid.

This thesis will deal with a particular branch of insurance: the Professional Civil Liability branch which is characterized in particular by the fact that claims have a longer lifespan on average than in other non-life insurance sectors. which will have an effect on provisioning as we will have the opportunity to see.

We will distinguish two types of provisions in the provisioning: provisions for claims to be paid or PSAP which result from a flat-rate scale or from an appraisal for the Professional Civil Liability branch to which must be added provisions for claims which have occurred but which have not been not yet been declared so-called late or IBNR.

In our project, we offer a critical analysis of the model risk in the provisioning of a contract in the Professional Civil Liability (RCP) branch.

This study is based first of all on the practical application of some classic methods of calculating provisions based on Chain Ladder and its stochastic variants to establish their suitability for the data of a Professional Civil Liability portfolio of a non-life insurer. We have therefore implemented processes managing the incomplete liquidation of payment triangles and that of charges. Then, the validation criteria for the different methods as well as the quantification of the risk associated with the choice of a reserve model. Then we focused on the risk assessment from the model, including the elements of model risk quantification. Finally, we chose the models that better adapt to the data in 2003 and 2007.

LISTE DES ABRÉVIATIONS

RCPM : *Responsabilité civile professionnelle Médicale*

CIMA : *Conférence Interafricaine des Marchés d'Assurances*

RCP : *Responsabilité civile professionnelle*

IARD : *Incendies, Accidents et Risques Divers*

IARDT : *Incendies, Accidents, Risque divers et Transport*

PSAP : *Provisions pour Sinistres A Payer*

RBNP : *Reported But Not Paid*

IBNR : *Incured But Not Reported*

PPNA : *La provision pour primes non acquises*

PREC : *La provision pour risque en cours*

PRE : *La provision pour risque d'exigibilité*

IIA : *Institut International des Assurances*

ISFA : *Institut de Science Financière et d'Assurances*

EMV : *Estimateur Maximum de Vraisemblance*

VAR : *Value At Risk*

TVAR : *Tail Value At Risk*

LISTE DES FIGURES

Figure 1. Organigramme des sources potentielles du risque de modèle	6
Figure 2. Nombre de sinistres par délai de déclaration	31
Figure 3. Nombre de dossiers par évènement et par exercice	31
Figure 4. Evolution des règlements et des provisions par année d'inventaire	32
Figure 5. Répartition des sinistres par exercice.....	33
Figure 6. Durée de traitement des sinistres.....	33
Figure 7. Règlements moyens par année de survenance.....	34
Figure 8. Charges moyennes par année de survenance	34
Figure 9. Vérification de l'hypothèse de linéarité	36
Figure 10. Bonis/Malis sur le modèle de Chain Ladder.....	37
Figure 11. Bonis/Malis sur le modèle de London Chain	38
Figure 12. Bonis/Malis sur le modèle de De Vylder	39
Figure 13. Résultats obtenus par la méthode de Mack pour le triangle des règlements .	40
Figure 14. Analyse graphique des résidus standardisés	41
Figure 15. Résultats obtenus par la méthode de Munich Chain	42
Figure 16. Analyse graphique des résidus standardisés	42
Figure 17. Vérification de l'hypothèse de linéarité.....	43
Figure 18. Bonis/Malis sur le modèle Gln Log normale	44
Figure 19. Résultats Bootstrap	45
Figure 20. Comparaison des provisions estimées par les différents modèles aux Règlements réels	52
Figure 21. Densités des distributions	54
Figure 22. Comparaison des Provisions Obtenues Par les Méthodes Déterministes sur le triangle de règlements de 1985 à 2007	55

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1. Répartition des sinistres.....	30
Tableau 2. Description de la base "Stats.xlsx" par année d'inventaire	32
Tableau 3. Facteurs de développement Chain Ladder - triangle des règlements	35
Tableau 4. Résultats obtenus par la méthode Chain ladder standard	35
Tableau 5. Provision estimée par Chain Ladder et règlements réels	37
Tableau 6. Valeurs estimées des paramètres de la méthode London Chain.....	37
Tableau 7. Résultats obtenus par la méthode London Chain	38
Tableau 8. Provision estimée par London Chain et Règlements réels	38
Tableau 9. Résultats obtenus par la méthode de De Vylder.....	39
Tableau 10. Provision estimée par De Vylder et Règlements réels.....	39
Tableau 11. Provision estimée par le Glm Log normale et les Règlements réels	44
Tableau 12. Provision estimée et Règlement réel	52
Tableau 13. Paramètres de la loi log-normale	53
Tableau 14. Erreur de modèle worst case	54
Tableau 15. Provisions estimées par les méthodes déterministes et Règlements réels	55

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'assurance est une opération par laquelle une personne (l'assureur) s'engage à réaliser une prestation, dans le cadre d'un contrat d'assurance, au profit d'un autre individu (l'assuré) lors de la survenance d'un événement incertain et aléatoire (risque) moyennant le paiement d'une cotisation ou d'une prime. La principale contrainte d'une compagnie d'assurance est de respecter ses engagements vis-à-vis des assurés. Cependant, l'assurance est un domaine dans lequel le cycle de production est inversé, autrement dit, l'assureur reçoit de la part des assurés des primes avant de fournir un service. Étant en possession des primes, l'assureur doit constituer des provisions afin de pouvoir respecter ses engagements ; il doit être en mesure de payer les sinistres à venir. Les provisions techniques sont des sommes d'argent en réserve destinées à couvrir les engagements de l'assureur vis-à-vis des assurés et des bénéficiaires de contrat. Par conséquent, ces provisions doivent être suffisantes pour permettre à l'assureur de s'acquitter intégralement de ses obligations. Le provisionnement occupe donc une place cruciale dans la vie d'une société d'assurance. Une préoccupation très importante est de trouver une méthode adéquate pour l'évaluation de nos provisions et savoir si celle reste optimale avec l'évolution du temps. Pour calculer ces provisions l'actuaire utilise des modèles basés sur des hypothèses. Cependant la responsabilité civile professionnelle qui est un contrat caractérisé par des développements très longs, des paiements volatiles et une période d'incertitude grande, du coup les modèles classiques de provisionnement à l'instar de Chain Ladder et ses variantes, ont du mal à capter cette incertitude et cette volatilité. L'objectif de ce mémoire est de trouver la méthode de calcul des provisions pour sinistres à payer (PSAP) qui s'apparente le mieux avec nos données. Au cas contraire présenter les risques courus quand on utilise les méthodes classiques sur les plages de données 2003 et 2007.

CHAPITRE 1

RISQUE DE MODELE ET PROVISIONNEMENT EN RCPM

Nous allons dans cette section, commencer par présenter les différentes provisions techniques identifiées dans une compagnie d'assurance non-vie, après nous allons essayer de définir la notion de modèle en identifiant ses différentes sources. En fin nous allons parler de l'Assurance Responsabilité Civile Médicale.

1.1 Différentes provisions techniques des compagnies d'assurance non-vie

L'assurance est caractérisée par un service après-vente très complexe, du fait des engagements auxquels l'assureur doit tenir. Pour y arriver, les compagnies d'assurance non-vie se voient obligé de constituer différentes provisions techniques au moment de l'inventaire en fin d'exercice. Au nombre de ces provisions techniques édictées par le Code des assurances CIMA (Conférence Interafricaine des Marchés d'Assurances) en son article 334-8, se retrouvent les provisions techniques les plus usitées, ainsi que les autres provisions techniques.

1.1.1 Provisions techniques les plus usitées

La provision pour sinistres à payer et la provision pour risques en cours sont les provisions techniques les plus usitées par les compagnies d'assurance non-vie.

a. La provision pour sinistres à payer

Le Code des assurances CIMA définit la provision pour sinistres à payer comme étant la « valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise ». Ainsi, la provision pour sinistres à payer correspond à la valeur estimative des dépenses pour sinistres non payés par la compagnie à la date de l'inventaire.

Cette provision doit concerner :

- Les sinistres réglés mais restant à payer : il s'agit des sinistres dont l'instruction du dossier est close, cependant le paiement de l'indemnité afférente n'est pas encore effectif ;

Thème : *Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.*

- Les sinistres non réglés : il s'agit des sinistres pour lesquels l'instruction du dossier est en cours ;
- Les sinistres non connus : ce sont les sinistres survenus et non déclarés à l'assureur. Ces sinistres sont appelés « sinistres tardifs ».

En vertu de l'article 334-12 du Code des assurances CIMA, la provision pour sinistres à payer se calcule par exercice de survenance, sans tenir compte des recours à exercer, ni de la réassurance. En outre, la méthode réglementaire pour le calcul de cette provision est la méthode « dossier par dossier ». Toutefois, par dérogation accordée par la Commission de Contrôle des Assurances, l'utilisation des méthodes statistiques est possible pour les deux derniers exercices de survenance. Parmi ces méthodes statistiques, se retrouvent entre autres : la méthode des coûts moyens, la méthode des cadences de règlement, la méthode de Chain Ladder. Le montant à retenir sera celui le plus élevé résultant de la comparaison des évaluations obtenues des différentes méthodes. Le montant issu de cette implémentation n'incorpore point l'évaluation des sinistres tardifs.

Concernant l'évaluation des sinistres tardifs, celle-ci est encadrée par la Circulaire N° 00230/CIMA/CRCA/PDT/2005. Ladite évaluation se fait en quatre (4) étapes :

- Elaboration des statistiques de déclaration des sinistres ;
- Calcul des cadences moyennes de déclaration ;
- Calcul du nombre de sinistres tardifs par exercice de survenance ;
- Calcul de la provision pour sinistres tardifs.

La provision pour sinistres à payer qui en résulte de la méthodologie évoquée ci-haut doit être majorée d'un chargement de gestion d'au moins égale à 5 % de cette provision, en application de l'article 334-13 du Code des assurances CIMA.

b. La provision pour risques en cours

L'émission des contrats d'assurance au sein d'une compagnie d'assurance intervient tout au long de l'exercice. Pour les compagnies émettant des contrats pour une période de garantie allant au-delà du 31 décembre, ces dernières sont contraintes d'évaluer la fraction de prime afférente correspondant pour le prochain exercice. D'où la notion de provision pour risques en cours. D'après le Code des assurances CIMA, cette provision est « destinée à couvrir les risques et les frais généraux afférents, pour chacun des contrats à prime payable d'avance, à la période comprise entre la date de l'inventaire et la prochaine échéance de prime, ou à défaut, le terme fixé par le contrat ». En outre, l'article 334-9 fait une mention sur son caractère suffisant pour la couverture des risques et frais généraux afférents pour les contrats concernés.

Le calcul de la provision pour risques en cours se fait branche par branche (article 334-10 du Code des assurances CIMA). Deux méthodes sont prescrites pour la détermination de cette provision : la méthode des 36 % et la méthode du prorata temporis. Quitte à retenir le montant le plus élevé résultant de l'évaluation des différentes méthodes, en vue de satisfaire à la suffisance de cette provision.

Outre ces deux provisions techniques les plus usitées, les compagnies d'assurance non-vie sont appelées à constituer d'autres types de provisions techniques.

1.1.2 Autres provisions techniques

Les autres provisions techniques que ces compagnies sont entre autres : la provision pour risques croissants, la provision pour égalisation, la provision mathématique des rentes, la provision pour risque d'exigibilité.

a. La provision pour risques croissants

Les risques croissants sont ceux dont la probabilité de réalisation augmente avec le temps. C'est le cas des risques maladies et invalidités qui connaissent une aggravation avec l'âge. Pour les opérations d'assurance contre ces risques, l'assureur perçoit des primes nivelées (primes qui restent constantes pendant la durée du contrat). Ainsi, les primes que perçoit l'assureur au début du contrat sont en excédents par à ce qu'il en faut pour la couverture du risque. L'excédent de prime sera provisionné par l'assureur afin de palier à l'insuffisance de la prime en fin de contrat. Cette provision constitue la provision pour risques croissants. Ladite provision est égale à la différence des valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés.

b. La provision pour égalisation

C'est une provision constituée en vue de la couverture des charges exceptionnelles liées à la survenance des sinistres pour les risques inhérents à des éléments naturels, le risque atomique, les risques de responsabilité civile dus à la pollution et les risques spatiaux.

i. La provision mathématique des rentes

La provision mathématique des rentes est destinée à la couvrir les rentes mises à charge des compagnies d'assurance en faveur des tiers pour les assurances de responsabilité civile ou d'accident de travail.

ii. La provision pour risque d'exigibilité

La provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques a pour fonction de permettre à l'entreprise d'assurance de faire face à ses engagements dans le cas des moins-values de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article 335-12 du Code des assurances CIMA. Les modalités de calcul de cette provision sont inscrites en l'article 334-14 dudit Code.

La précision des modèles et les mesures de risque utilisées sont des éléments essentiels pour le calcul de la solvabilité de toute compagnie d'assurance et de réassurance. Les décisions prises sur la base de ces modèles assurantiels aussi bien pour la tarification, pour le calcul des réserves ou encore pour la projection des actifs financiers de la compagnie dépendent essentiellement des résultats statistiques des modèles calibrés et des jugements d'experts. Souvent les données disponibles ne permettent pas de valider les hypothèses des modèles et d'estimer de manière précise leurs paramètres. Les jugements alors basés sur ces modèles sont

parfois donc biaisés et peuvent ainsi induire des erreurs dans le choix du modèle approprié pour la détermination précise du capital requis et le montant de réserve suffisant pour honorer les engagements. Nous allons donc parler de la notion de risque de modèle et ses différentes sources.

1.2 Risque de modèle

1.2.1 Définition du risque de modèle

Le risque de modèle fait ressortir comme son nom l'indique la notion de « risque ». Or parler de risque suppose, selon sa définition habituellement retenue, que l'on puisse identifier clairement son origine et être capable de quantifier une perte potentielle relative à celui-ci. De plus, la littérature actuelle ne définit pas le risque de modèle d'une manière précise et formelle. Les premiers à avoir évoqué ce risque dans le cadre de l'évaluation du capital ont été les acteurs du monde bancaire et financier, et ce afin de remettre en cause la pertinence des modèles financiers.

La définition proposée est la suivante : « Le risque de modèle est un type de risque qui se réalise lorsqu'un modèle financier, utilisé pour mesurer un risque de marché d'une entreprise ou la valeur de transactions financières, n'accomplit pas les tâches ou ne reflète pas correctement les risques pour lesquels il a été conçu ».

Dans un cadre assurantiel, une définition plus générale est celle proposée dans le papier de Shaun Wang et al. : « Le risque de modèle peut provenir de diverses formes d'erreur, ou de la construction ou de l'utilisation d'un modèle inapproprié ». Cette définition suppose que la source du risque de modèle n'est pas unique, et que pour limiter l'apparition d'un tel risque il faut clairement identifier ses sources potentielles et essayer de les maîtriser.

1.2.2 Les différentes sources du risque de modèle

Les sources du risque de modèle sont multiples et dépendent principalement de la nature des modèles et des données utilisées pour modéliser les risques. Il existe beaucoup de classes de modèles que l'on peut regrouper en trois catégories :

- Le premier groupe concerne les modèles purement statistiques basés sur des observations historiques et des hypothèses mathématiques.
- Le deuxième groupe concerne les modèles basés sur les hypothèses faites par des experts, autrement dit jugement d'expert (ou « Expert Judgement »).
- Le troisième groupe concerne les modèles basés sur une combinaison des deux premiers groupes.

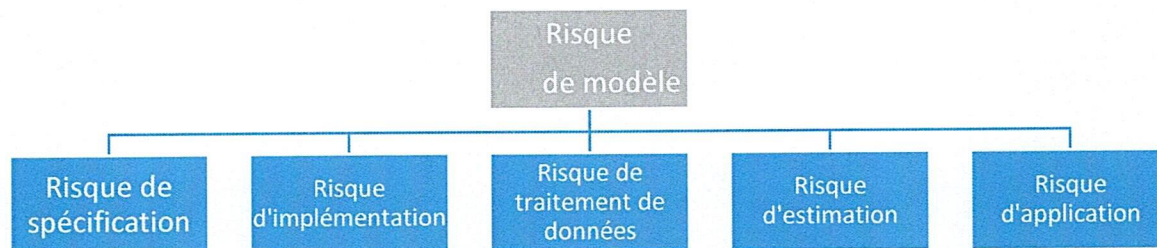
Actuellement, les modèles mis en place par les actuaires correspondent plutôt à la troisième catégorie citée c'est-à-dire avec une prise en compte d'hypothèses statistiques et de jugement d'expert. La fiabilité des modèles peut être souvent mise en doute à cause de leur incapacité à reproduire précisément la réalité observée et la meilleure alternative pour pallier

Thème : *Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.*

ce problème reste la combinaison d'avis statistiques et d'experts. Cependant une étude préalable des diverses sources potentielles du risque de modèle permet de suivre et de maîtriser justement l'apparition d'un tel risque.

Les différentes sources potentielles associées au risque de modèle peuvent être les suivantes :

Figure 1. Organigramme des sources potentielles du risque de modèle



a. Le risque de spécification

Le risque de spécification peut se définir comme le risque que le modèle choisi par l'actuaire pour évaluer un risque assurantiel ou financier soit inapproprié. Il y a deux cas de figures dans lesquels on peut considérer un modèle comme inapproprié :

- Si le modèle n'est pas adapté pour le type de risque que l'on souhaite étudier.
- Si le modèle est basé sur des hypothèses qui ne sont pas vérifiées en réalité.

C'est la raison pour laquelle l'actuaire doit se poser trois questions essentielles avant tout choix de modèle :

- Quel risque doit être modélisé ?
- Quelles sont les données à notre disposition ?
- Quels sont les modèles que nous pouvons appliquer pour modéliser ce risque ?

b. Le risque d'implémentation

Il existe deux formes de risque d'implémentation :

- Le risque qu'un mauvais choix d'algorithme soit effectué pour implémenter les concepts spécifiques au modèle.
- Le risque qu'un algorithme approprié soit choisi, mais qu'il contienne des erreurs de codage.

Thème : *Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.*

La plupart du temps, la modélisation d'un risque se fait par l'intermédiaire de logiciel informatique. Beaucoup d'actuaire et de gestionnaires de risque implémentent les modèles dans leur département et ne jugent pas nécessaire d'avoir recours à un support informatique (IT) pour le faire.

Parfois, une revue approfondie du code ne peut être effectuée car elle nécessite tout simplement trop de temps. Des erreurs d'implémentation peuvent alors subsister et provoquer des résultats incohérents. De plus, la complexité des techniques de codage employées ne permet parfois pas de tracer rapidement la cause du problème.

c. Le risque de traitement des données

Une mauvaise compréhension et utilisation des données mises à la disposition des actuaires peuvent conduire à divers biais que ce soit dans le choix des modèles ou dans l'estimation de leur paramètre. Il est donc souvent nécessaire d'effectuer divers choix ou retraitements sur les données :

- Choix de l'historique de données : ce choix doit se faire de manière précise et adaptée. Souvent, certaines périodes historiques ne sont plus représentatives de notre futur.
- Retraitement des données : suppression d'événements exceptionnels si nécessaire, correction d'erreur de saisie, lissage,

d. Le risque d'estimation

Le risque d'estimation intervient lors du calibrage d'un modèle, méthode qui consiste à ajuster les caractéristiques du modèle à des données disponibles et/ou à certaines contraintes imposées a priori. L'estimation des paramètres du modèle dépend alors de ces données initiales et des méthodes statistiques utilisées. D'une part, les résultats obtenus par ces méthodes se voient affectés d'une erreur d'échantillonnage qui induit un écart systématique par rapport à la "vraie" valeur des paramètres. D'autre part, ces méthodes de calibrage donnent parfois des valeurs très différentes pour les paramètres du modèle et il est difficile alors de définir laquelle sera la plus appropriée.

e. Le risque d'application

Le risque d'application peut être issu de la complexité des modèles. La plupart de ces modèles sont basés sur des travaux de recherches, et des connaissances techniques et théoriques poussées sont parfois requises pour les comprendre.

Ainsi cette complexité, notamment au niveau des hypothèses du modèle, oblige les actuaires à définir et appliquer des approximations permettant l'utilisation des modèles à partir des données existantes.

Les risques d'implémentation, de traitement des données, d'estimation et d'application ne présentent pas de méthodes concrètes de quantification, et interviennent en général après le choix des modèles. Le choix s'est donc porté sur le risque de spécification qui est en général la

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

principale cause de risque de modèle et qui présente dans la littérature quelques méthodes de quantification.

Faisant partie des assurances de responsabilité civile, l'assurance responsabilité civile professionnelle est une assurance destinée d'une part aux professions à caractère juridique ou libéral, et d'autre part à celles relatives aux prestations de service. C'est dans cette logique que s'inscrit l'assurance responsabilité civile professionnelle médicale. Celle-ci est destinée aux médecins, indépendamment de leur qualification ou spécialité s'inscrit l'assurance responsabilité civile professionnelle médicale. Celle-ci est destinée aux médecins, indépendamment de leur qualification ou spécialité.

Compte-tenu des engagements vis-à-vis des assurés auxquels les assureurs doivent faire face, ces derniers recourent au provisionnement pour y arriver.

Dans la suite de ce chapitre, il sera question de présenter l'assurance responsabilité civile professionnelle médicale, caractérisée par des développements très long, des paiements volatiles et une période d'incertitude grande. Ce qui explique le risque de modèle dans cette branche.

1.3 Assurance responsabilité professionnelle médicale

Les différentes responsabilités encourues par les médecins, ainsi que la déclinaison du contrat d'assurance responsabilité professionnelle médicale sont d'une grande utilité afin de cerner l'importance de cette assurance.

1.3.1 Responsabilités encourues

Au quotidien, les médecins, dans le cadre de leur profession, peuvent voir leur responsabilité civile engagée soit sur le terrain contractuel, soit sur le terrain délictuel ou quasi-délictuel

La responsabilité contractuelle est celle encourue du fait d'un dommage qui résulte de l'inexécution d'une obligation contractuelle. Elle est fondée sur les articles 1146 et suivants du Code Civil.

Article 1146 du Code Civil : « Les dommages et intérêts ne sont dus que lorsque le débiteur est en demeure de remplir son obligation, excepté néanmoins lorsque la chose que le débiteur s'était obligé de donner ou de faire ne pouvait être donnée ou faite que dans un certain temps qu'il a laissé passer ».

Article 1147 du Code Civil : « Le débiteur est condamné, s'il y a lieu, au paiement de dommages et intérêts, soit à raison de l'inexécution de l'obligation, soit à raison du retard dans l'exécution, toutes les fois qu'il ne justifie pas que l'inexécution provient d'une cause étrangère qui ne peut lui être imputée, encore qu'il n'y ait aucune mauvaise foi de sa part ».

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Article 1148 du Code Civil : « Il n'y a lieu à aucun dommage et intérêt lorsque, par suite d'une force majeure ou d'un cas fortuit, le débiteur a empêché de donner ou de faire ce à quoi il était obligé, ou a fait ce qui lui était interdit ».

Quant à la responsabilité délictuelle ou quasi-délictuelle, c'est celle encourue en raison d'un dommage causé à autrui. Elle tire son fondement des articles 1382 et suivants du Code Civil.

Article 1382 du Code Civil : « Tout fait quelconque de l'homme, qui cause à autrui un dommage oblige celui par la faute duquel il est arrivé, à le réparer ».

Article 1383 du Code Civil : « Chacun est responsable du dommage qu'il a causé non seulement par son fait, mais encore par sa négligence ou par son imprudence ».

Article 1384 du Code Civil : « On est responsable non seulement du dommage que l'on cause par son propre fait, mais encore de celui qui est causé par le fait des personnes dont on doit répondre, ou des choses que l'on a sous sa garde ».

Alinéa 5 : « Les maîtres et commettants (sont responsables) du dommage causé par leurs domestiques et préposés, dans les fonctions auxquelles ils sont employés ».

C'est ainsi que les compagnies d'assurance non-vie ont mis en place l'assurance responsabilité civile professionnelle médicale à destination des médecins, lorsque leur responsabilité civile sera engagée du fait de l'exercice normal de leur profession.

1.3.2 Présentation de la garantie du contrat d'assurance responsabilité civile professionnelle médicale

C'est un contrat comportant les garanties de base suivantes : la garantie responsabilité pendant exploitation, la garantie responsabilité professionnelle, la garantie défense-recours.

La garantie responsabilité pendant exploitation couvre les conséquences pécuniaires de la responsabilité encourue par l'assuré en raison des dommages corporels, matériels et immatériels, causés aux tiers à l'occasion de l'exercice de ses activités professionnelles.

La garantie responsabilité professionnelle est destinée à couvrir les conséquences pécuniaires de la responsabilité contractuelle encourue par l'assuré en raison des dommages corporels causés aux patients, lorsque ces derniers sont en consultation ou en traitement, par son fait, celui de ses aides et assistants, lesquels dommages étant consécutifs aux erreurs ou fautes professionnelles.

Bien que ces garanties soient limitées aux activités de l'assuré mentionnées aux conditions particulières, celles-ci restent acquises quel que soit l'endroit où le professionnel exerce.

La garantie défense-recours vise à couvrir les frais de défense et/ou de recours pour tout litige garanti et qui résulte de l'exercice de l'activité professionnelle de l'assuré.

Outre ces garanties de base, figurent également des extensions de garantie que sont : le remplacement de l'assuré et la responsabilité civile dépositaire. Ainsi, par le biais de l'extension remplacement de l'assuré, le praticien remplaçant l'assuré est garanti lorsque sa responsabilité

Thème : *Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.*

personnelle est engagée, à condition que ce dernier soit qualifié et autorisé sur le plan égal à exercer. Au moyen de l'extension responsabilité civile dépositaire, l'assuré est garanti en cas de disparition ou détérioration, des vêtements et objets personnels des patients, au sein de ses locaux.

CHAPITRE 2

METHODES DE PROVISIONNEMENT ENVISAGEES

Il existe deux grandes classes de méthodes de provisionnement en assurance non-vie, celles dites déterministes et celles dites stochastiques.

2.1 Méthodes déterministes envisagées

Dans cette section, nous allons tout d'abord évaluer les provisions pour sinistres à payer (PSAP) par des méthodes déterministes ensuite faire une synthèse et comparaison des résultats obtenus. Ces méthodes de provisionnement sont toutes basées sur des triangles de liquidation et des charges. Ces derniers étant l'information des règlements et des charges de tous les sinistres survenus dans le portefeuille considéré, regroupés par année de survenance et par année de développement. Ils reflètent la dynamique globale des sinistres, et permettent d'avoir une vision agrégée de ceux-ci.

2.1.1 Méthodes de Chain Ladder

Ces méthodes s'appliquent à des triangles de paiements cumulés (ou de charges). Elles sont basées sur l'utilisation de facteurs de développements (f_j), $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ou des facteurs de cadences de règlement (p_j), $j \in \{0, \dots, n-1\}$, implicitement supposées constants pour toutes les années d'origine.

a. La méthode de Chain-Ladder Standard

La méthode Chain Ladder est la méthode de provisionnement la plus simple et la plus utilisée. Elle s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- (H1) : Pour $j = 0, \dots, n-1$, les ratios $\frac{c_{i,j+1}}{c_{ij}}$, sont indépendants de l'année d'origine i (année de survenance i), et sont donc dépendants de la seule année de développement j
- (H2) : Les ratios $\frac{c_{i,j+1}}{c_{ij}}$, sont indépendants signifient simplement que pour ($j = 0, \dots, n-1$) : $\frac{c_{0,j+1}}{c_{0j}} = \frac{c_{1,j+1}}{c_{1j}} = \dots = \frac{c_{i,j+1}}{c_{ij}} = \dots = \frac{c_{n-j-1,j+1}}{c_{n-j-1,j}}$

Le facteur de développement (f_j) de l'année de développement j est donnée par l'expression :

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} c_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} c_{ij}}, \text{ pour } j = 0, \dots, n-1$$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

La charge ultime S_i pour l'année d'exercice i est donnée par :

$$S_i = C_{in} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{n-1} f_k$$

La provision R_i pour l'année d'exercice i est donnée par : $R_i = C_{in} - C_{i,n-i}$

La provision globale R est donnée par : $R = \sum_{i=0}^n R_i$

Remarque : Si nécessaire, les facteurs de développement fournissent un rectangle complet de liquidation par : $C_{ij} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{n-1} f_k$

Validation du modèle

Deux outils sont utilisés pour valider l'hypothèse d'application de la méthode Chain Ladder.

➤ CC-plots

Si pour j fixé, il existe un paramètre f_j tel que : $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$ alors les couples

$(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ $j \in \{0, \dots, n-j-1\}$ sont "sensiblement" alignés par une droite passant par l'origine.

➤ d-triangle

La validation repose sur le triangle des facteurs de développements individuels $(f_{i,j})$, dit d-triangle, pour $i + j \leq n - 1$. L'hypothèse de validation de la méthode Chain Ladder n'est acceptable que si pour $j = 0, \dots, n - 1$, les $f_{i,j}$ de la j -ème colonne sont "sensiblement" constants. Si cette condition de constance des $f_{i,j}$ n'est pas remplie, des choix alternatifs de facteurs f_j peuvent être faits ; en particulier si les colonnes du d-triangle montrent la présence de valeurs extrêmes ou de structures non aléatoires (tendance, effet saisonnier...).

Avantages et limites de la méthode

L'avantage de la méthode du Chain Ladder est sa simplicité à la mettre en œuvre. Elle a aussi l'avantage d'accepter les valeurs négatives des montants payés non cumulés, donc applicable à des triangles de paiements nets de recours encaissés. Cependant, elle présente quelques limites :

- Le schéma de développement est identique pour toutes les années de survenance, c'est-à-dire que le coût du sinistre au bout de la j -ème année est proportionnel au coût du sinistre de $(j - 1)$ -ème année et au coût du sinistre pour toutes les années précédentes) et le coefficient de proportionnalité ne change pas dans le temps. Ce n'est pas le cas en pratique en présence d'incertitudes externes (jurisprudence) et internes (changement de management de la gestion des sinistres) ;

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

- Pour les années récentes, l'incertitude est très importante et de plus en plus importante pour les risques à déroulement long ou les paiements commencent au bout de plusieurs années ;
- La méthode ne permet pas d'obtenir une mesure de précision des estimations.

b. La méthode de London-Chain

Introduite par Benjamin et Eagles en 1986 pour le calcul des réserves au Lloyds, cette méthode suppose l'existence, pour j fixé, de paramètres (f_j, a_j) tels que :

Pour $i = 0, \dots, n-j-1$: $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + a_j$. S'il en est ainsi, les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ $i \in \{0, \dots, n-j-1\}$ sont sensiblement alignés. Par analogie avec les techniques de régression simple, le couple de paramètres (f_j, a_j) est déterminé par moindres carrés, soit à minimiser :

$$\Delta_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j+1} - f_j C_{i,j} - a_j)^2$$

Les solutions s'obtiennent en résolvant le système d'équation des dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta_j}{\partial f_j} = 0 \\ \frac{\partial \Delta_j}{\partial a_j} = 0 \end{cases}$$

Les expressions f_j de a_j sont respectivement :

$$f_j^{LC} = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} C_{i,j+1} - \overline{C_j} \overline{C_{j+1}}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_j^2 - \overline{C_j}^2}, a_j^{LC} = \overline{C_{j+1}} - f_j^{LC} \overline{C_j}$$

$$\text{Avec : } \overline{C_j} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \quad \text{et} \quad \overline{C_{j+1}} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}$$

Ainsi, la colonne $j+1$ du triangle inférieur se déduira de celle de j (pour $i \geq n-j$) par :

$$C_{i,j+1} = f_j^{LC} C_{i,j} + a_j^{LC}$$

Avantages et limites de la méthode

Elle est certes simple à mettre en œuvre, mais il se pose une difficulté d'interprétation du paramètre a_j . Un autre inconvénient est le risque de sur-paramétrisation qui entraîne des

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

estimations peu robustes du fait qu'il faut estimer $2n$ paramètres f_j et a_j avec des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ données du triangle.

2.1.3. Moindres carrés de De Vylder

Les modèles factoriels (ou modèles à facteurs) ont été utilisés dans les années 70, avant leur remise au goût du jour par une relecture économétrique. Ces modèles permettent ainsi d'obtenir des intervalles de confiance des différentes grandeurs (comme initié par Verrall (2000)). Ils s'appliquent aux montants non cumulés (ou aux loss ratios correspondants) $x_{i,j}$ sous la forme d'un produit de paramètres correspondant chacun à une direction du triangle de liquidation :

$$x_{i,j} = x_i y_j \lambda_{i+j}$$

Où :

- x_i : paramètre de l'année d'origine i ;
- y_j : paramètre du délai de règlement j ;
- λ_{i+j} : paramètre de l'année calendaire $i+j$: effet inflation.

Ce modèle présente beaucoup de paramètres à estimer : $3(n+1)$, soit un nombre important mais inférieur à celui des observations pour $n > 4$. Les trois facteurs ne sont malheureusement pas identifiables sous cette forme, puisque les vecteurs $[(x_i), (y_j), (\lambda_{i+j})]$ et $[(ax_i), (y_j a), (\lambda_{i+j})]$ conduisent aux mêmes valeurs. Il y a donc nécessité de faire un choix des facteurs, comme décrits dans les modèles ci-dessous.

En présence d'une inflation annuelle constante : $\lambda_{i+j} = \lambda$, le paramètre d'inflation peut être "intégré" dans les autres paramètres et le modèle devient pour $(0 \leq i, j \leq n)$:

$$x_{i,j} = x_i y_j$$

Remarque 1 : On introduit une contrainte d'identifiabilité telle que :

$$\sum_{j=0}^n y_j = 1$$

Grâce à cette contrainte, on obtient une interprétation des paramètres (x_i) et (y_j) . En fait :

$$\sum_{j=0}^n x_{i,j} = \sum_{j=0}^n x_i y_j = x_i \sum_{j=0}^n y_j = x_i$$

Cela implique que si x_i est la charge ultime de sinistre de l'année i , alors $y_j = \frac{x_{i,j}}{x_i}$ est la part de cette charge au cours de la j - ème année de développement.

Remarque 2 : le modèle est : $x_{i,j} = x_i y_j$ alors :

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j x_{i,k} = \sum_{k=0}^j x_i y_k = x_i \sum_{k=0}^j y_k = x_i Y_j$$

Avec :

$$Y_j = \sum_{k=0}^j y_k$$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

D'où :

$$\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \frac{x_i Y_{j+1}}{x_i Y_j} = \frac{x_{i,j}}{x_i}$$

Cette expression est indépendante de i . On retrouve l'hypothèse de la méthode du Chain Ladder (mais les facteurs de développement ne sont plus les moyennes pondérées).

Les $2(n+1)$ paramètres $(x_i, y_j)_{0 \leq i, j \leq n}$ du modèle sont estimés par la méthode des moindres carrés pondérés en minimisant :

$$\Delta'' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} w_{i,j} (x_{i,j} - x_i y_j)^2$$

Cela revient, après dérivation par rapport à x_i et y_j , à résoudre le système d'équation suivante :

$$\begin{cases} x_i = \frac{\sum_{j=0}^{n-i} w_{i,j} x_{i,j} y_j}{\sum_{j=0}^{n-i} w_{i,j} Y_j^2}, & i = 0, \dots, n \\ y_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} w_{i,j} x_i x_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} w_{i,j} X_i^2}, & j = 0, \dots, n \end{cases}$$

On obtient une solution numérique $((\hat{x}_i), (\hat{y}_j))$ de ce système écrit de manière récursive) à partir d'une valeur en y par exemple que l'on note : $(Y_j^{(c)})_{j=0, \dots, n}$. La solution numérique s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_i = f_i(y_0, \dots, y_n) \\ y_j = g_j(x_0, \dots, x_n) \end{cases}$$

Et elle est obtenue par convergence des suites $(X_i^{(m)})_{i=0, \dots, n}$ et $(Y_j^{(m)})_{j=0, \dots, n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i^{(m)} = f_i(Y_0^{(m-1)}, \dots, Y_n^{(m-1)}) \\ Y_j^{(m)} = g_j(X_0^{(m-1)}, \dots, X_n^{(m-1)}) \end{cases} \quad m \geq 1$$

La vitesse de convergence des suites dépend du choix de la valeur initiale. Mais les valeurs "prévues"

$\hat{x}_{i,j} = \hat{x}_i \hat{y}_j$ ne dépendent pas de la valeur initiale.

Exemple de choix de la valeur initiale

Le choix de la valeur initiale pourrait s'appuyer sur les égalités suivantes :

$$\frac{x_{i,j}}{x_{i,0}} = \frac{x_i y_j}{x_i y_0} = \frac{y_j}{y_0}$$

Soit par exemple :

$$\begin{aligned} Y_0^{(0)} &= 1 \\ Y_j^{(0)} &= \frac{x_{0,j}}{x_{0,0}} \end{aligned}$$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Une fois que l'on a obtenu les $\hat{x}_i$ et $\hat{y}_j$, on complète le triangle des paiements non cumulés par les valeurs "prévues" $\hat{x}_{i,j} = \hat{x}_i \hat{y}_j$ et on calcule :

$$\hat{R}_i = \sum_{k=n-i+1}^n \hat{x}_{i,k}$$

Et

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

Remarque : On obtient une solution interprétable $((\widetilde{x}_i), (\widetilde{y}_j))$ telle que :

$$\sum_{j=1}^n \widetilde{y}_j = 1$$

Par normalisation d'une solution quelconque $((\widetilde{x}_i), (\widetilde{y}_j))$:

$$\widetilde{x}_i = \hat{x}_i \sum_{j=1}^n \hat{y}_j$$

$$\widetilde{y}_j = \frac{\hat{y}_j}{\sum_{k=1}^n \hat{y}_k}$$

On peut définir le triangle inférieur des paiements cumulés pour obtenir :

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} + \sum_{h=n-i+1}^j \hat{x}_{i,h}$$

Ou

$$\widehat{C}_{i,j} = \sum_{h=0}^j \hat{x}_{i,h}$$

Une validation empirique du modèle est de faire une comparaison, pour $i + j \leq n$, des valeurs « prévues » $\hat{x}_{i,j}$ aux observations $x_{i,j}$ du triangle supérieur.

Remarque : Une méthode d'estimation alternative est la méthode des totaux marginaux qui consiste à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-i} x_{i,j} = \sum_{j=0}^{n-i} x_i y_j, & i = 0, \dots, n \\ \sum_{i=0}^{n-j} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-j} x_i y_j, & j = 0, \dots, n \\ \sum_{j=0}^n y_j = 1 \end{cases}$$

On obtient une solution unique $((\hat{x}_i), (\hat{y}_j))$ qui donnera des valeurs « prévues » $\hat{x}_{i,j}$ fortement liées à celles obtenues par Chain Ladder.

2.2 METHODES STOCHASTIQUES ENVISAGEES

Les méthodes déterministes présentent quelques limites notamment :

- Impossibilité d'obtenir une estimation de la loi de probabilité de la provision totale ;
- Absence de calcul de volatilité, de la Value at Risk (VaR) ...
- Impossibilité de mesurer l'incertitude sur l'estimation des provisions de sinistres.

D'où le recours aux méthodes stochastiques qui reposent sur une modélisation stochastique paramétrée du triangle de liquidation, les paramètres du modèle étant estimés à l'aide des données du triangle supérieur.

On considère donc que les paiements incrémentaux $X_{i,j}$ ou cumulés $C_{i,j}$ du triangle de liquidation sont des variables aléatoires, observées à la date de fin d'inventaire (31/12/n). L'approche stochastique permet ainsi de :

- Expliciter les hypothèses utilisées dans le modèle ;
- Valider, au moins partiellement, celles-ci par une analyse des résidus ;
- Évaluer la variabilité des provisions "prévues" par le modèle ;
- Construire des intervalles de confiance ;
- Simuler, à l'aide de méthodes de Monte Carlo, la sinistralité des exercices futurs.

Avec cette approche, la provision globale R est une variable aléatoire dont on a estimé la loi de probabilité et estimer des caractéristiques telles que : la VaR, la probabilité d'insuffisance, ... Le risque ici, est le risque de risque de modèle, c'est-à-dire : le risque d'erreur de spécification (on utilise un modèle inexact qui produit des résultats erronés).

2.2.1 Le modèle récursif de Mack

Présentation :

Les hypothèses du modèle :

- (H1) : indépendance des exercices d'origine :

Les variables aléatoires $(C_{i,j})_{j=0,\dots,n}$ et $(C_{k,j})_{j=0,\dots,n}$ sont, $i \neq k$ indépendants.

- (H2) : Il existe une constante $f_j > 0$, telle que $\forall j = 0, \dots, n$ et $\forall i = 0, \dots, n$,

$$E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$$

- (H3) ; Pour $j = 1, \dots, n$, Il existe σ_s^2 telle que :

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

$$\text{Var} (C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_s^2 C_{i,j}, i = 0, \dots, n$$

Sous les hypothèses (H1) et (H2), Mack a montré que le modèle stochastique, fournit la même provision que par la méthode de Chain Ladder standard.

Remarques :

- L'hypothèse (H1) d'indépendance ne serait pas vérifiée en cas de changement important dans la gestion de sinistres ou dans le taux d'inflation qui les impacte, ces changements affectants, par effet calendaire, plusieurs exercices d'origine.
- On peut noter que : $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ et l'hypothèse (H2) peut s'écrire : $E(f_{i,j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j$

Proposition : Soit $T = \{C_{i,j} | i + j \leq n + 1\}$, l'information disponible à la date n . Sous (H1) et (H2), on obtient pour $i \geq 2$, $E(C_{i,n}|T) = (f_{n-1} \times \dots \times f_{n-i+1}) C_{i,n-i+1}$.

Preuve :

Sous (H1),

$$\text{On a : } E(C_{i,n}|T) = E(C_{i,n}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1})$$

Et par double conditionnement,

$$E(C_{i,n}|T) = E(E(C_{i,n}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1}) | C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1})$$

Mais, par (H2) : $E(C_{i,1}, \dots, C_{i,n-1}) = f_{n-1} C_{i,n-1}$ et donc

$$E(C_{i,n}|T) = E(f_{n-1} C_{i,n-1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1})$$

$$E(C_{i,n}|T) = f_{n-1} \times E(C_{i,n-1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1}) \text{ et de proche en proche en proche,}$$

$$E(C_{i,n}|T) = f_{n-1} \times \dots \times f_{n-i+1} E(C_{i,n-i+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1})$$

$$E(C_{i,n}|T) = (f_{n-1} \times \dots \times f_{n-i+1}) C_{i,n-i+1}$$

Le théorème montre que l'estimateur : $\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} (\hat{f}_{n-i+1} \times \dots \times \hat{f}_{n-1})$ a la même forme que $E(C_{i,n}|T)$ qui est la meilleure prédiction de $C_{i,n}$ basée sur les observations T .

Les estimateurs de facteurs de développements sont donnés par le modèle Chain Ladder :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, j = 1, \dots, n-1$$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Proposition : Sous les hypothèses (H1) et (H2), les estimateurs $\hat{f}_j$ des facteurs de développement sont sans biais et non corrélés.

Preuve :

On note, pour $j = 1, \dots, n$, $T_j = \{C_{i,h} \mid h \leq j, i + j \leq n + 1\}$, la partie supérieure du triangle des liquidations limitées au délais de développement j .

Estimateur sans biais : $E(\hat{f}_j | T_j) = f_j$

D'après (H2), on a :

$$E(C_{i,j+1} | T_j) = E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$$

Et donc :

$$E(\hat{f}_j | T_j) = E\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \mid T_j\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} E(C_{i,j+1} | T_j)}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} f_j C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} = f_j \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} = f_j$$

$E(\hat{f}_j) = E(E(\hat{f}_j | T_j)) = E(f_j) = f_j$. Cela implique que $\hat{f}_j$ est un estimateur sans biais de f_j .

Corrélation : $cov(\hat{f}_j, \hat{f}_k) = 0$

Pour $j \leq k$,

$E(\hat{f}_j \hat{f}_k) = E(E(\hat{f}_j \hat{f}_k | T_k)) = E(\hat{f}_j) E(\hat{f}_k | T_k) = E(\hat{f}_j) f_k = E(\hat{f}_j) E(\hat{f}_k)$. Car $\hat{f}_j$ est T_k -mesurable. Cela implique que $cov(\hat{f}_j, \hat{f}_k) = 0$.

L'absence de corrélation entre les estimateurs permet ainsi d'écrire :

$$E(\hat{f}_j \hat{f}_{j+1} \dots \hat{f}_{k-1} \hat{f}_k) = f_j \times f_{j+1} \dots \dots f_{k-1} \times f_k$$

Et

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} (\hat{f}_{n+i+1} \times \dots \times \hat{f}_{n-1})$$

$\hat{C}_{i,n}$ est un estimateur sans biais et plus généralement $\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i+1} (\hat{f}_{n+i+1} \times \dots \times \hat{f}_{j-1})$ est un estimateur sans biais.

De plus, $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n-i+1}$ est un estimateur sans biais.

Erreur de prévision

Quand on estime un paramètre θ par $\hat{\theta}$, classiquement pour quantifier l'erreur associée, on calcule l'erreur quadratique moyenne (EQM) ou MSE :

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

$$MSE(\theta) = E [(\theta - \hat{\theta})^2]$$

On cherche à quantifier l'incertitude de l'estimateur de provision $\hat{R}_i$ associée à une variable aléatoire R_i .

L'erreur quadratique moyenne s'écrit alors :

$$MSE (\hat{R}_i) = E [(\hat{R}_i - E(R_i))^2]$$

Si l'on souhaite comparer $\hat{R}_i$ et R_i , on ne parle pas de MSE mais d'erreur quadratique moyenne de prédiction (MSEP).

$$MSEP (\hat{R}_i) = E [(\hat{R}_i - R_i)^2]$$

Plus précisément, on travaille avec l'erreur quadratique moyenne de prédiction conditionnelle (MSEPC) :

$$MSEP (\hat{R}_i) = E [(\hat{R}_i - R_i)^2 | T_i]$$

En faisant une approximation au 1er ordre, on peut montrer que :

$$E [(\hat{R}_i - R_i)^2] \approx E [(\hat{R}_i - E(R_i))^2] + E [(R_i - E(R_i))^2]$$

$$E [(\hat{R}_i - R_i)^2] \approx MSE (\hat{R}_i) + Var (R_i)$$

- $MSE (\hat{R}_i)$ est l'erreur d'estimateur ;
- $Var (R_i)$ est l'erreur classique de modèle.

Proposition : Sous les hypothèses (H1), (H2), et (H3), il est possible d'estimer $MSEPC (\hat{R}_i)$,

Pour $i = 1, \dots, n$, par :

$$MSEPC (\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left[\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j-1} C_{i,k}} \right]$$

avec la convention :

$$\hat{C}_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}$$

et pour $j \leq n-2$.

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{k=1}^{n-j} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - f_j \right)^2$$

La valeur de $\hat{\sigma}_j^2$ pour $j = n-1$ est extrapolée à partir de la série, $\hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2$ de telle sorte que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}^2}{\hat{\sigma}_{n-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-1}^2}$$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Soit pour $j = n - 1$,

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}; \min (\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right\}$$

Réécriture du modèle

Une réécriture du modèle sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3) est alors de supposer que :

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}} \varepsilon_{i,j}$$

Avec les erreurs $\varepsilon_{i,j}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) centrées et réduites.

On peut utiliser la méthode des moindres carrés pondérés, c'est-à-dire on cherche à résoudre :

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{C_{i,j}} (C_{i,j+1} - f_j C_{i,j})^2 \right\}$$

avec les poids qui sont inversement proportionnels à la variance, autrement dit aux $C_{i,j}$.

Les résidus standardisés sont exprimés par :

$$\hat{\varepsilon}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

on peut finalement estimer le paramètre σ_j^2 par :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j-1} \left(\frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}} \right)^2$$

Pour la charge globale :

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i$$

On obtient sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente :

$$MSECP(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ MSECP(\hat{R}_i) + \widehat{C_{i,n}} \left(\sum_{k=i+1}^n \widehat{C_{k,n}} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{h=1}^{n-j} \hat{R}_h} \right\}$$

Vérification des hypothèses du modèle :

H1 : l'hypothèse d'indépendance ligne à ligne peut ne pas être vérifiée en pratique en cas par exemple de changement dans la gestion des sinistres ou en cas d'inflation (qui intervient par diagonale en rendant les vecteurs non indépendants).

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

H2 : Pour vérifier que $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$, on fait appel au graphique CC plot.

H3 : Pour vérifier cette hypothèse, on représente le graphique des résidus normalisés

$$\hat{\varepsilon}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}, i = 1, \dots, n - j$$

Ce graphique ne doit pas faire apparaître aucune structure non aléatoire (pas de tendance par exemple).

Erreur d'estimation du ratio $\frac{S}{P}$

On note le ratio $\frac{S}{P}$ pour l'année d'origine i :

$$\left(\frac{S}{P}\right)_i = \frac{C_{i,n}}{P_i}$$

L'estimateur de ratio est défini par :

$$\left(\frac{\hat{S}}{\hat{P}}\right)_i = \frac{\widehat{C_{i,n}}}{P_i}$$

L'erreur quadratique moyenne de prédiction est :

$$MSEP\left(\left(\frac{\hat{S}}{\hat{P}}\right)_i\right) = \left(\frac{1}{P_i}\right)^2 MSEP(\widehat{C_{i,n}})$$

avec $MSEP(\widehat{C_{i,n}}) = MSEP(\widehat{R_i})$ car $R_i - \widehat{R_i} = C_{i,n} - \widehat{C_{i,n}}$

Critiques de la méthode :

Les inconvénients du modèle de Mack, dans la mesure où ce modèle reprend les hypothèses de Chain Ladder, sont les mêmes que pour cette dernière. En revanche, contrairement à Chain Ladder, le modèle de Mack permet d'estimer l'erreur de prévision des réserves, et donc d'obtenir un intervalle de confiance. Elle ne permet toutefois pas d'obtenir la distribution des réserves sans hypothèse supplémentaire.

2.2.2 Méthode de Munich Chain Ladder

La méthode dite Munich-Chain-Ladder, propose d'utiliser non seulement les paiements cumulés, mais aussi une autre information disponible : l'estimation des charges (dossier par dossier) des différents sinistres faites par les gestionnaires de sinistres, afin de réduire les écarts entre les IBNR basés sur les sinistres payés et ceux basés sur les sinistres survenus. Les triangles de paiements étaient basés sur des mouvements financiers ; ces triangles de charges sont basés sur des estimations faites par des gestionnaires compte tenu de l'information à leur disposition.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

En effet, cette méthode contrairement aux autres méthodes stochastiques, intègre la corrélation naturelle existante entre les paiements et les charges.

Présentation de la méthode

Pour commencer, on rappelle que $C_{i,j}$ désigne le montant des paiements cumulés de l'année d'origine i après j années de développement. On note par $M_{i,j}$ la charge relative aux sinistres de l'année d'origine i vue à la fin de l'année j .

Hypothèses du modèle :

Les hypothèses du modèle sont les mêmes que celles du modèle de Mack. Elles doivent être vérifiées sur le triangle de règlements cumulés et sur le triangle de Charges.

Procédure de calcul de la provision :

La méthode utilise le triangle des règlements cumulés $(C_{i,j})_{i+j \leq n}$ et le triangle des charges $(M_{i,j})_{i+j \leq n}$.

Pour estimer la provision par la méthode de Munich Chain Ladder, on commence par estimer :

- Les loss ratios paiement/charge et charge/paiement par : $Q_{ij} = \frac{C_{ij}}{M_{ij}}$ et $Q_{ij}^{-1} = \frac{M_{ij}}{C_{ij}}$;
- Les coefficients de développement sur le triangle des règlements et sur le triangle des charges par :

$$\hat{f}_j^P = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \text{ et } \hat{f}_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} M_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} M_{i,j}}$$

- Les variances des coefficients par : $(\hat{\sigma}_j^P)^2 = \frac{1}{n-j+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-j+1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j^P \right)^2$ et

$$(\hat{\sigma}_j^I)^2 = \frac{1}{n-j+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-j+1} M_{ij} \left(\frac{M_{i,j+1}}{M_{ij}} - \hat{f}_j^I \right)^2$$

- Les coefficients entre les règlements et les charges par :

$$(\hat{\rho}_j^I)^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j+1} M_{ij} (Q_{ij} - \hat{q}_j)^2 \text{ et } (\hat{\rho}_j^P)^2 = \frac{1}{n-j} \cdot \sum_{i=0}^{n-j+1} C_{ij} (Q_{ij}^{-1} - \hat{q}_j^{-1})^2$$

$$\text{Avec } \hat{q}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{n-j} M_{ij}} = \frac{1}{\hat{q}_j^{-1}}$$

- Les résidus par : $\widehat{Res}(C_{i,j+1}) = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j^P C_{i,j}}{\hat{\sigma}_j^P} \cdot \sqrt{C_{i,j}}$; $\widehat{Res}(M_{i,j+1}) = \frac{M_{i,j+1} - \hat{f}_j^I M_{i,j}}{\hat{\sigma}_j^I} \cdot \sqrt{M_{i,j}}$;
 $\widehat{Res}(Q_{i,j}^{-1}) = \frac{Q_{i,j}^{-1} - \hat{q}_j^{-1}}{\hat{\rho}_j^P} \cdot \sqrt{C_{i,j}}$ et $\widehat{Res}(Q_{i,j}) = \frac{Q_{i,j} - \hat{q}_j}{\hat{\rho}_j^I} \cdot \sqrt{M_{i,j}}$

- Les coefficients de corrélation entre les règlements et les charges par :

$$\hat{\alpha}^P = \frac{\sum \widehat{Res}(Q_{i,j}^{-1}) \cdot \widehat{Res}(C_{i,j+1})}{\sum \widehat{Res}(Q_{i,j}^{-1})^2} \text{ et } \hat{\alpha}^I = \frac{\sum \widehat{Res}(Q_{i,j}) \cdot \widehat{Res}(M_{i,j+1})}{\sum \widehat{Res}(Q_{i,j})^2}$$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Après avoir évalué les estimateurs nécessaires on passe maintenant à la dernière étape qui consiste à compléter les deux rectangles. Pour cela on utilisera les formules récursives ci-dessous :

- Pour les règlements : $\hat{C}_{ij+1} = \hat{C}_{ij} \cdot (\hat{f}_j^P + \hat{\alpha}^P \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^P}{\hat{\rho}_j^P} \cdot (\frac{\hat{M}_{ij}}{\hat{C}_{ij}} - \hat{q}^{-1}_s))$
- Pour les charges : $\hat{M}_{ij+1} = \hat{M}_{ij} \cdot (\hat{f}_j^I + \hat{\alpha}^I \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^I}{\hat{\rho}_j^I} \cdot (\frac{\hat{C}_{ij}}{\hat{M}_{ij}} - \hat{q}_j))$

2.2.3 Modèle Linéaire Généralisé (GLM)

Introduit par Nelder et Wedderburn en 1972, les GLMs sont une extension du modèle linéaire normal. Leur utilisation pour la détermination stochastique des provisions pour sinistre remonte aux années 1990.

La méthode GLM est une méthode qui consiste à trouver un lien entre une variable à expliquer (ou variable réponse) Y et des variables explicatives $X_1 \dots X_p$.

Un GLM est défini par 3 composantes : la composante **aléatoire**, la composante **systématique** et la **fonction de lien**.

Composante aléatoire

Elle correspond à la variable à expliquer Y dont la distribution appartient à la famille exponentielle définie ci-dessous :

Définition : Soit θ est un paramètre réel appelé paramètre naturel, $\varphi > 0$ un paramètre de dispersion et Y une variable aléatoire réelle.

La loi de Y appartient à la famille exponentielle de paramètre θ et φ s'il existe trois fonctions $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $c(\cdot)$ dérivables telles que

- $b(\cdot)$ soit 3 fois dérivable et sa dérivée première est inversible
- Sa fonction densité est définie par :

$$f_{\theta, \varphi}(y) = \exp \left\{ \frac{(y\theta - b(\theta))}{a(\varphi)} + c(y, \varphi) \right\}$$

Pour une variable Y de densité $f_{\theta, \varphi}$ défini ci-dessus, il est établi que :

$$E(Y) = b'(\theta) = \mu \text{ et } \text{Var}(Y) = b''(\theta) a(\varphi) = V(\mu) .$$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

La fonction $b'(\cdot)$ étant inversible, $\theta = (b')^{-1}(\mu)$. En général, la fonction $a(\varphi)$ est de la forme $\frac{\varphi}{\omega}$, où ω représente la pondération que l'on veut affecter aux observations. Dans la suite de ce travail, on suppose sans perte de généralité que $\omega = 1$, ce qui donne $a(\varphi) = \varphi$.

Les principales lois de la famille exponentielle utilisées dans les GLM sont : la loi **Normale**, la loi de **Poisson**, la loi **Gamma** et la loi **Binomiale**.

Dans le cas du provisionnement, les paiements incrémentaux correspondent à la composante aléatoire. Ils sont supposés indépendants et suivent une loi appartenant à la famille exponentielle.

La composante systématique

$(X_1, \dots, X_p)$ sont les variables explicatives du modèle et $x = (x_1, \dots, x_p)$ une observation desdites variables.

Le prédicteur linéaire associé à ces observations est défini par : $\eta(x) = \sum_{i=1}^p x_i \beta_i$ où $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ est un vecteur de paramètres qui devront être estimés.

Dans le cas du provisionnement, la composante systématique s'écrit : $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}$, $\eta_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j$, où α_i représente la variable année d'origine, β_j la variable délai de règlement et μ représente la variable année calendaire.

Avec contrainte d'identifiabilité du modèle $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

La fonction lien

Notons par $g(\cdot)$ une fonction qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique. Elle relie l'espérance de la variable à expliquer Y , notée $\mu_{i,j}$, au prédicteur linéaire η défini par :

$\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j})$. On suppose que g est une fonction monotone et dérivable. Les plus utilisées sont : identité $\eta_{i,j} = \mu_{i,j}$, $\log \eta_{i,j} = \ln(\mu_{i,j})$ et inverse $\eta_{i,j} = \mu_{i,j}^{-1}$

La fonction lien qui vérifie la relation $\mu_{i,j} = g^{-1}(\eta_{i,j})$ ou $\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j})$ est appelée fonction de lien canonique. Les fonctions de lien canonique des différentes distributions sont :

- Normale : Identité $\mu_{i,j}$
- Poisson : logarithme népérien $\ln(\mu_{i,j})$
- Gamma : Inverse - $\frac{1}{\mu_{i,j}}$
- Binomiale : Logit $\ln\left(\frac{\mu_{i,j}}{1-\mu_{i,j}}\right)$

Estimation du modèle :

Il s'agit de déterminer les estimateurs des paramètres μ , (α_i) et (β_j) . Sous l'hypothèse d'indépendance des $X_{i,j}$, le produit des densités de la distribution de type exponentiel

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

sélectionnée conduit à la fonction de vraisemblance : $L[(X_{i,j})_{i+j \leq n}; \xi, (\varphi)]$ associée aux observations du triangle supérieur et au paramètre

$$\xi = [\mu, (\alpha_i), (\beta_j)].$$

Déterminer les estimations revient à déterminer les paramètres qui maximise $L[(X_{i,j})_{i+j \leq n}; \xi, (\varphi)]$. En appliquant la condition du 1er ordre qui stipule d'annuler les dérivées partielles de $\ln(L)$ par rapport aux paramètres de régression $\mu, (\alpha_i), (\beta_j)$, nous obtenons le système des équations suivantes dites de Wedderburn :

$$\forall k \in \{1, \dots, 2n+1\}, \sum_{i,j=1; i+j \leq n}^n \omega_{i,j} \frac{(x_{i,j} - \mu_{i,j})}{V(\mu_{i,j})} \frac{\delta \mu_{i,j}}{\delta \eta_{i,j}} \eta_{i,j}^{(k)} = 0,$$

Où $\eta_{i,j}^{(k)}$ est la dérivée partielle de $\eta_{i,j}$ par rapport au $k^{\text{ième}}$ de la suite $\mu, (\alpha_i)$ et (β_j) .

Notons que dans ce système, le paramètre φ n'apparaît pas.

Ce système n'est soluble que numériquement (par un algorithme standard de Newton-Raphson par exemple) et sa résolution conduit à l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\xi} = [\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i), (\hat{\beta}_j)] \text{ de } \xi = [\mu, (\alpha_i), (\beta_j)].$$

L'estimation de l'espérance $\mu_{i,j}$ de la variable aléatoire $Y_{i,j}$ est alors donnée par l'expression :

$$\hat{\mu}_{i,j} = g^{-1}(\hat{\eta}_{i,j}) \text{ Avec } \hat{\eta}_{i,j} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$$

$\hat{\mu}_{i,j}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance (emv) de $\mu_{i,j} = E[Y_{i,j}]$

Si on pose $\hat{Y}_{i,j} = \hat{\mu}_{i,j} = g^{-1}(\hat{\eta}_{i,j})$ est alors un prédicteur de $Y_{i,j}$, pour $i+j-1 > n$. Les provisions par année de survenance i : $R_i = \sum_{i+j-1 > n} Y_{i,j}$ et la provision totale : $R = \sum_i R_i$ peuvent être prédites respectivement

$$\text{par : } \hat{R}_i = \sum_{i+j-1 > n} \hat{Y}_{i,j} = \sum_{i+j-1 > n} \hat{\mu}_{i,j} \text{ et par } \hat{R} = \sum_i \hat{R}_i = \sum_i \sum_{i+j-1 > n} \hat{\mu}_{i,j}$$

nous allons nous intéresser au modèle de Renshaw et Verrall Ce modèle suppose que les variables $Y_{i,j}$, désignant les règlements de sinistres d'année de survenance i et d'année de développement j , soient indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètres $\mu_{i,j}$, Renshaw et Verrall ont montré que les règlements futurs correspondent exactement à ceux trouvés en utilisant la méthode de Chain Ladder classique.

Sélection du modèle :

La qualité de l'ajustement est évaluée à l'aide de la statistique du χ^2 de Pearson. Les résidus de Pearson sont définis comme :

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

$$r_{i,j}^{(p)} = \frac{x_{i,j} - \mu_{i,j}}{V(\widehat{\mu}_{i,j})}$$

Par sommation sur les cellules, on en déduit la statistique de Pearson

$$\chi^2 = \frac{1}{\varphi} \sum_{i+j \leq n} (r_{i,j}^{(p)})^2$$

χ^2 est asymptotiquement distribué selon une loi du chi-2, de paramètre : $p = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (2n+1)$

Et un estimateur de φ est :

$$\hat{\varphi} = \frac{\varphi \chi^2}{p} = \frac{1}{p} \sum_{i+j \leq n} (r_{i,j}^{(p)})^2$$

Les résidus de Pearson doivent asymptotiquement suivre une loi $\mathcal{N}(0, \varphi)$.

2.2.4 Le modèle du Bootstrap

La méthode du Bootstrap est plus facilement interprétable et plus robuste, et surtout ne nécessite pas d'hypothèse à réaliser sur la distribution sous-jacente. Comme son nom l'indique, cette méthode permet, à partir d'un échantillon initial, de simuler N nouveaux échantillons de même taille que l'échantillon de départ. C'est pourquoi, le Bootstrap est aussi vu comme une méthode de « ré-échantillonnage ». Dans le cas du provisionnement, l'échantillon initial est le triangle supérieur des règlements et le but est d'estimer un intervalle de confiance de l'estimation de la Provision Technique totale.

L'hypothèse fondamentale du Bootstrap est que les éléments de l'échantillon sont indépendants et identiquement distribués. Or cette hypothèse n'est pas vérifiée par les règlements incrémentaux qui ne sont pas mutuellement indépendants. Pour cela, l'échantillonnage ne va pas se faire sur les incréments mais sur les résidus de Pearson calculés à partir de ces données.

Présentation du modèle

On souhaite obtenir un intervalle de confiance pour la variable aléatoire $\mathbf{R}$ qui modélise le montant de la provision technique. Pour cela, on se base sur les règlements des années précédentes. Cependant, on ne peut pas utiliser directement le triangle des règlements cumulés car ces variables ne sont pas indépendantes. En effet, excepté ceux de la première colonne, les montants cumulés dépendent des observations précédentes. Afin de contourner ce problème de non-indépendance, le ré-échantillonnage ne s'effectuera pas sur les règlements cumulés mais sur des résidus, qui seront définis plus tard, calculés à partir de ces observations.

Voici la procédure à suivre :

- A l'aide du modèle GLM, nous calculons les paramètres. Nous utilisons ces paramètres pour calculer les valeurs « attendues », c'est-à-dire pour reproduire le triangle supérieur

des paiements estimés. Ce triangle est appelé triangle prédit des règlements cumulés et que l'on note $(\hat{C}_{i,j})$; en procédant par récursion arrière :

- On décumule le triangle des règlements cumulés $(C_{i,j+1})$ et le triangle prédit des règlements cumulés $\hat{C}_{i,j}$ afin d'obtenir le triangle des règlements non cumulés $X_{i,j}$ et le triangle prédit des règlements non-cumulés, noté $\widehat{\mu}_{i,j}$

- À l'aide de ces deux nouveaux triangles, on calcule le triangle des résidus de Pearson, correspondent à la différence entre les montants incrémentaux du triangle supérieur d'origine et les montants incrémentaux du triangle supérieur prédit divisée par la racine

$$\text{carrée du montant incrémental prédit correspondant : } \forall i+j \leq n, r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \widehat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{\mu}_{i,j})}}$$

- À partir de la matrice des résidus qu'on applique la méthode de Bootstrap qui consiste à tirer, de manière aléatoire, avec remise, des résidus et les réinjecter dans la matrice : c'est une permutation. Pour chaque permutation, nous revenons à la matrice des encaissements non cumulés par la relation :

$$\forall i+j \leq n, X_{i,j}^* = \widehat{\mu}_{i,j} + r_{i,j}^* \sqrt{\text{Var}(\widehat{\mu}_{i,j})}$$

- Ce triangle, nous permet alors de calculer un montant de provision R^* "bootstrap" à l'aide de la méthode de Chain Ladder.
- On réitère B fois cette dernière étape, afin d'obtenir un échantillon de B observations de la variable R . On peut alors calculer sa moyenne, son écart type empirique et un intervalle de confiance :

- ✓ La moyenne empirique est : $\bar{R} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \widehat{R}^{*(k)}$, qui est la provision globale ;

- ✓ Ecart-type empirique : $\widehat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^B (\widehat{R}^{*(k)} - \bar{R})^2}{B-1}}$

- ✓ Pour un nombre d'itérations suffisamment grand (1 000, 10 000, voire 100000), l'échantillon suit une loi normale et ainsi, avec sa moyenne et son écart-type empirique, on peut construire un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour la variable aléatoire R .

$$[\bar{R} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} * \widehat{\sigma}_R ; \bar{R} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} * \widehat{\sigma}_R] \text{ Où } q_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ est le quantile d'ordre } 1 - \alpha \text{ de la loi normale centrée réduite.}$$

CHAPITRE 3

APPLICATION DES MODELES DE PROVISIONNEMENT

3.1 Présentation des données

3.1.1 Origine des données

Les données de notre étude se trouvent dans un fichier Excel nommé " **Stats.xlsx** ". Il contient les informations sur la branche responsabilité civile professionnelle médicale d'une société d'assurance en France. Il est constitué de **52 965** lignes et de **65** variables.

Remarque : Un sinistre est un événement (incendie, accident, décès...) qui fait jouer les garanties du contrat : indemnité, capital ou rente...

Les données sont celles d'un portefeuille responsabilité civile médicale d'une compagnie étrangère.

3.1.2 Présentation des Variables et statistique descriptive

Nous allons décrire quelles variables qui vont être prépondérantes dans notre étude :

- La première nommée " **NUMSIN** " représente le numéro de sinistre ;
- La deuxième nommée " **DATSIN** " représente la date de survenance du sinistre ;
- La troisième nommée " **DATDEC** " représente la date à laquelle le sinistre a été déclaré ;
- La quatrième nommée " **DATCLO** " représente la date à laquelle le sinistre a été clôturé ;
- La cinquième nommée " **ETASIN** " renseigne sur l'état du sinistre : **clos**, **ouvert** ou **réouvert** ;
- La sixième nommée " **SommeDeTOTREG** " renseigne la somme totale des règlements : c'est ce que l'assureur a déjà réglé ;
- La septième nommée " **SommeDeRESERV** " c'est la provision que l'assureur a le jour où on a fait l'extraction ;
- La huitième nommée " **Règlement nets de recours** " représente règlements faits par l'assureur années après années ;
- La neuvième nommée " **Provisions** " représente le montant mis à coté par l'assureur années après années pour faire face à ses engagements (provision dossier/dossier) ;
- La dixième nommée " **Charge** " représente la somme des **règlements** + les **provisions**.

3.2 Analyse descriptive des données

L'objectif de cette partie étant d'estimer les PSAP pour les sinistres d'une branche responsabilité civile professionnelle médicale, il est impératif de bien effectuer une analyse des variables dont on dispose, afin de procéder à une sélection pour la modélisation. Nous allons débiter cette section en examinant les différents problèmes que peuvent avoir nos données. Ensuite, il sera question de faire une analyse descriptive.

3.2.1 Nettoyage de la base de données

Après un contrôle qui s'est fait en utilisant une recherche conditionnelle dans Excel, il en ressort que nos montants ne sont pas tous positifs car il y a des recours par conséquent cohérents, l'absence des valeurs manquantes, l'absence des lignes telles que l'année d'exercice soit supérieure à l'année d'inventaire. Après contrôle, nous avons **8254** sinistres qui n'ont pas de date de clôture sur **52964** sinistres au total. Nous avons trouvé **139 doublons**. En les supprimant il nous reste **52 825** sinistres, pour 214,04 M de règlements cumulés (nets de recours, ceux-ci représentant moins de 4% des règlements), 151,66 M de provisions (celles constituées par les gestionnaires), soit une charge de 365,7 M à fin 2011 repartis de la manière suivante :

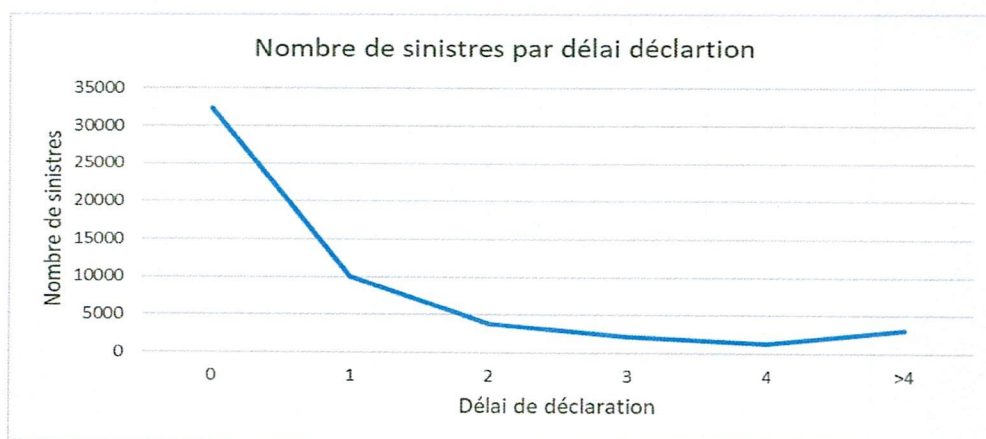
Tableau 1. Répartition des sinistres

	Clos	Ouverts	Ré-ouverts	Total
Nombre de dossiers	44552	7 929	344	52825
Règlements cumulés	151696868	52 651 879	9698343,56	214047090,9
Provisions	0	137 638 291	14 023 274	151661564,7
Charge	151696868	190 290 170	23 721 617	365708655,6

Les déclarations et ouvertures de dossiers sont relativement corrélées. Les survenances quant à elles semblent suivre une même tendance, mais avec un décalage dans le temps (délai pour l'assureur de connaître l'existence du sinistre), ce qui s'illustre particulièrement sur les 4 dernières exercices, avec une sous-estimation probable des survenances.

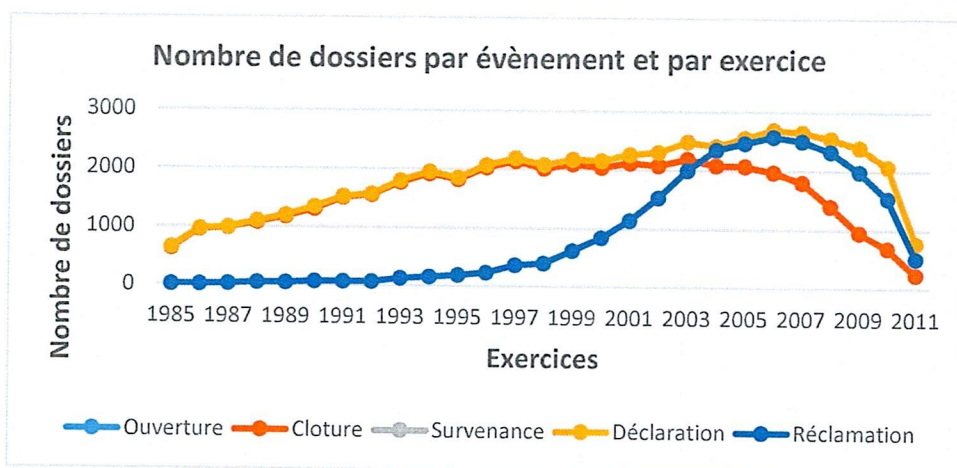
Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Figure 2. Nombre de sinistres par délai de déclaration



Les délais de réclamation ont sensiblement évolué dans le temps, les déclarations lors des deux premières années suivant la survenance ayant littéralement diminuées. Ce n'est qu'au terme de quatre ans après la survenance que les taux de déclarations sont les mêmes quelle que soit la date de survenance.

Figure 3. Nombre de dossiers par évènement et par exercice

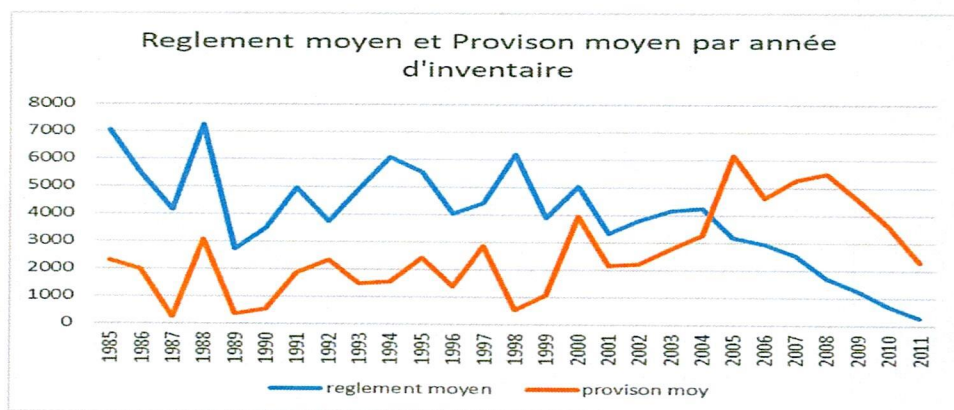


3.2.2 Analyse descriptive : Evolution des règlements et des provisions par année d'inventaire

La Figure 4 représente l'évolution des règlements et des provisions par année d'inventaire.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Figure 4. Evolution des règlements et des provisions par année d'inventaire



Nous constatons qu'en moyenne, les règlements sont toujours supérieurs à aux provisions jusqu'en 2004. Année à partir de laquelle les provisions deviennent supérieures aux règlements.

Tableau 2. Description de la base "Stats.xlsx" par année d'inventaire

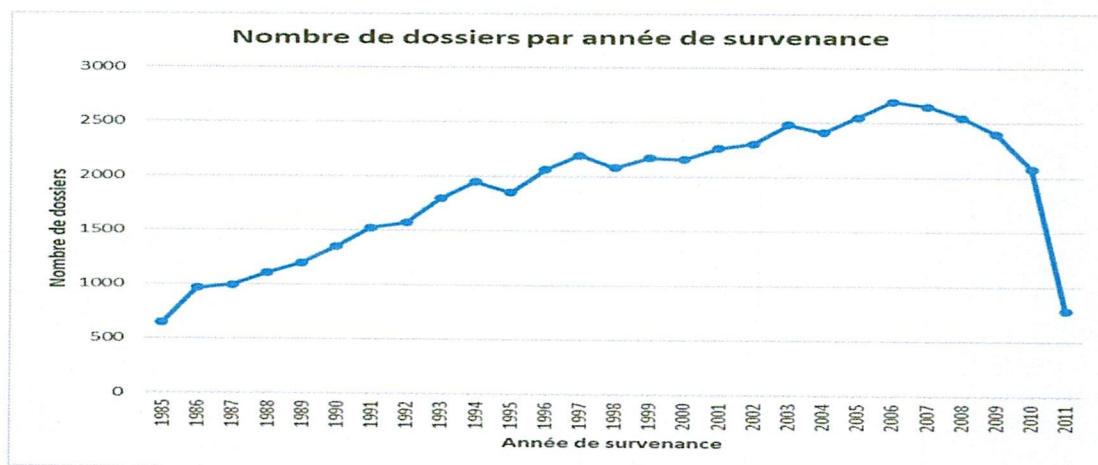
Année d'inventaire	Règlements	Provision	Année d'inventaire	Règlements	Provision
1985	4 009 235	29 741 756	1998	5 601 271	36 585 331
1986	1 013 452	30 268 185	1999	7 055 845	37 111 760
1987	1 866 881	30 794 614	2000	7 301 563	37 638 189
1988	1 923 423	31 321 043	2001	9 217 739	38 164 618
1989	3 445 871	31 847 471	2002	8 253 215	38 691 047
1990	1 686 309	32 373 900	2003	10 984 276	39 217 476
1991	1 552 895	32 900 329	2004	15 918 830	39 743 905
1992	1 940 042	33 426 758	2005	13 467 864	40 270 334
1993	3 386 450	33 953 187	2006	12 032 491	40 796 763
1994	3 839 679	34 479 616	2007	12 952 107	41 323 191
1995	3 685 286	35 006 045	2008	13 602 242	41 849 620
1996	4 873 193	35 532 474	2009	18 008 570	42 376 049
1997	4 965 466	36 058 903	2010	18 460 895	42 902 478
			2011	15 273 701	43 428 907

Répartition des sinistres par année

La représentation du nombre de sinistres de la base en fonction de leur année de survenance est illustrée dans La figure 5.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Figure 5. Répartition des sinistres par exercice

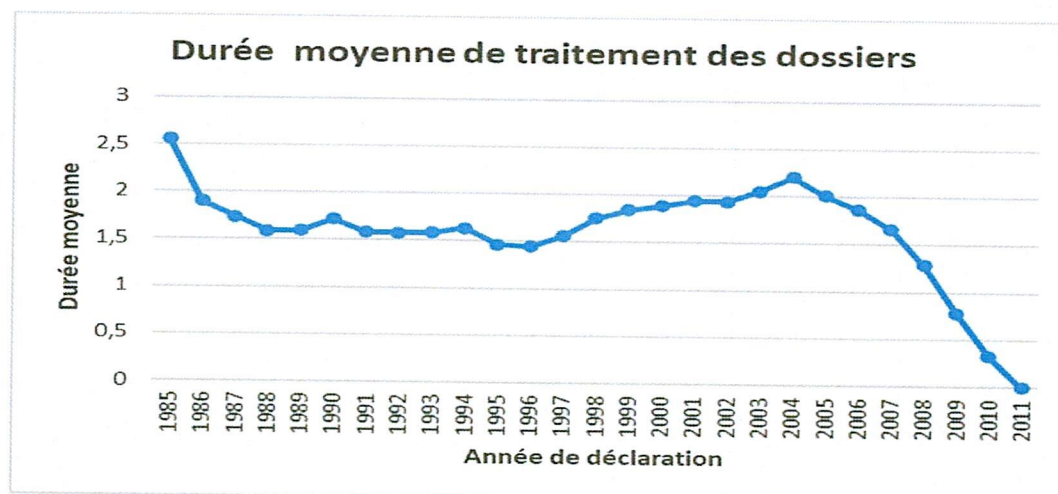


Nous constatons qu'en 2006, nous avons eu le plus grand nombre de dossiers l'année où il y a eu le plus grand nombre de sinistres. La durée de traitement des dossiers est relativement constante dans le temps. La durée de traitement des dossiers a un comportement assez régulier, malgré une forte dispersion sur certaines durées.

Clôture

La durée de traitement des dossiers est relativement constante dans le temps, que ce soit en la rapportant à la date de survenance du sinistre qu'à la date de réclamation (depuis 2003). La pondération par la charge finale montre bien que la durée de traitement est d'autant plus longue que la charge finale est élevée. La figure 6 présente la durée moyenne de traitement des dossiers par année de déclaration.

Figure 6. Durée de traitement des sinistres



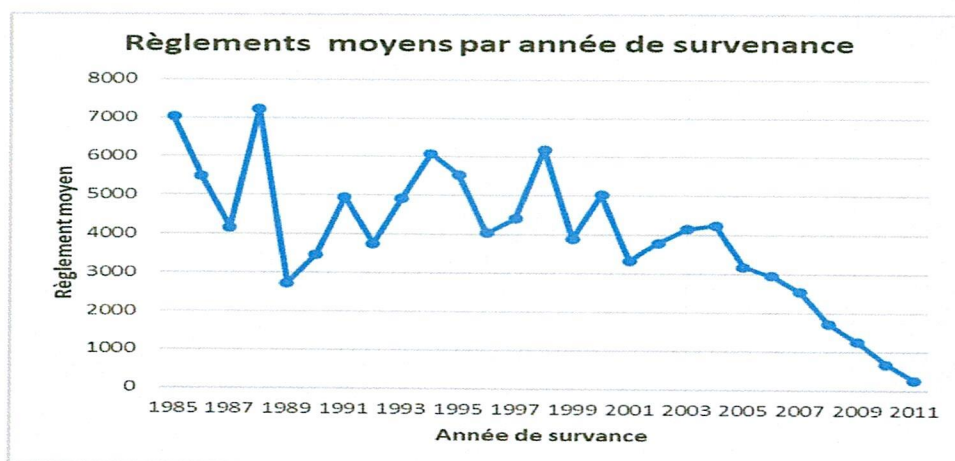
Nous constatons que plus nous avançons plus la durée de traitement diminue jusqu'en 2004 année où les provisions commencent en moyenne à être supérieures aux règlements.

Règlements moyens par exercice

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

La figure 7 présente les règlements moyens en fonction de l'année d'exercice.

Figure 7. Règlements moyens par année de survenance

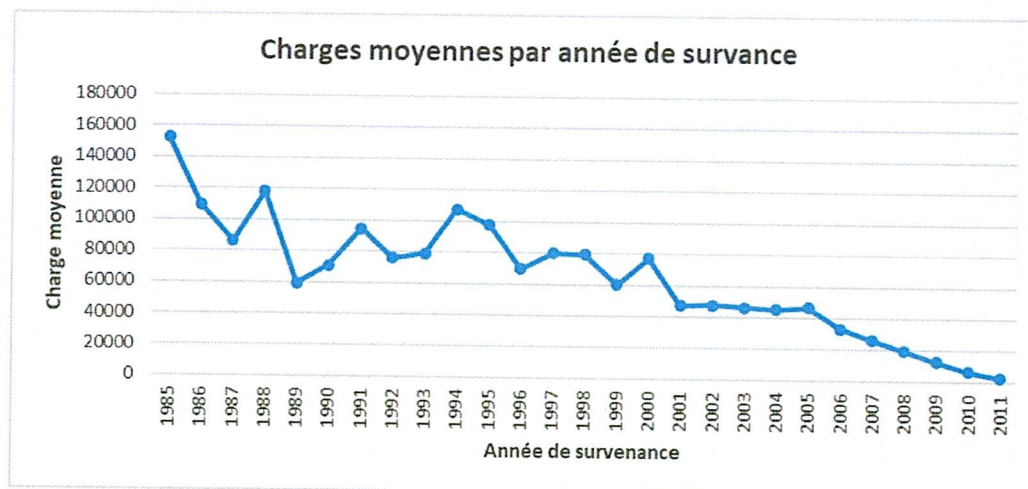


Le graphe nous montre que plus on avance dans le temps plus les règlements diminuent. Ce qui traduit la volatilité des paiements dans les contrats RCPM.

Charges finales par exercice

La figure 8 présente la charge moyenne par année de survenance.

Figure 8. Charges moyennes par année de survenance



3.3 Application des méthodes à la base de données

3.3.1. Application des méthodes déterministes envisagées

a. Méthode Chain Ladder standard

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Dans cette section, nous allons tout d'abord calculer la provision par la méthode de Chain Ladder et ensuite nous allons faire une validation de ce modèle.

Estimations

Les facteurs de développement obtenus en appliquant le modèle au triangle des règlements sont récapitulés dans le Tableau 3.

Tableau 3. Facteurs de développement Chain Ladder - triangle des règlements

j	fj	j	fj	j	fj
0	2,9945164	7	1,1811708	14	1,0176544
1	1,6615237	8	1,1196236	15	1,1194058
2	1,4639141	9	1,0773909	16	1,0244241
3	1,3390599	10	1,0881164	17	1,0272076
4	1,279833	11	1,053643	18	1
5	1,1733611	12	1,030257		
6	1,2179659	13	1,0441712		

La méthode Chain Ladder standard est appliquée aux triangles des règlements et de charges. Les résultats sont consignés dans le Tableau 4 :

Tableau 4. Résultats obtenus par la méthode Chain ladder standard

Année de survenance	Règlements Ultimes	Diagonale du triangle de Règlements	Provision RI
1985	3 410 346	3 410 346	0
1986	2 464 506	2 399 229	65 277
1987	4 208 327	3 999 184	209 142
1988	3 673 356	3 118 440	554 916
1989	3 713 195	3 097 575	615 620
1990	8 544 276	6 826 178	1 718 098
1991	6 632 971	5 143 573	1 489 398
1992	5 317 059	3 913 225	1 403 834
1993	7 666 164	5 185 206	2 480 958
1994	13 889 245	8 719 534	5 169 711
1995	7 273 296	4 078 250	3 195 046
1996	11 887 714	5 643 236	6 244 477
1997	11 573 675	4 510 930	7 062 745
1998	12 361 777	4 106 237	8 255 540
1999	19 872 745	5 157 838	14 714 907
2000	15 107 768	2 928 263	12 179 504
2001	10 817 518	1 432 260	9 385 258
2002	13 499 659	1 075 748	12 423 911
2003	11 252 128	299 430	10 952 698
Total	173 165 726	75 044 683	98 121 042

Selon cette méthode, le montant des PSAP est de **98.121.042,5** pour le triangle des règlements.

Vérification graphique des hypothèses du modèle

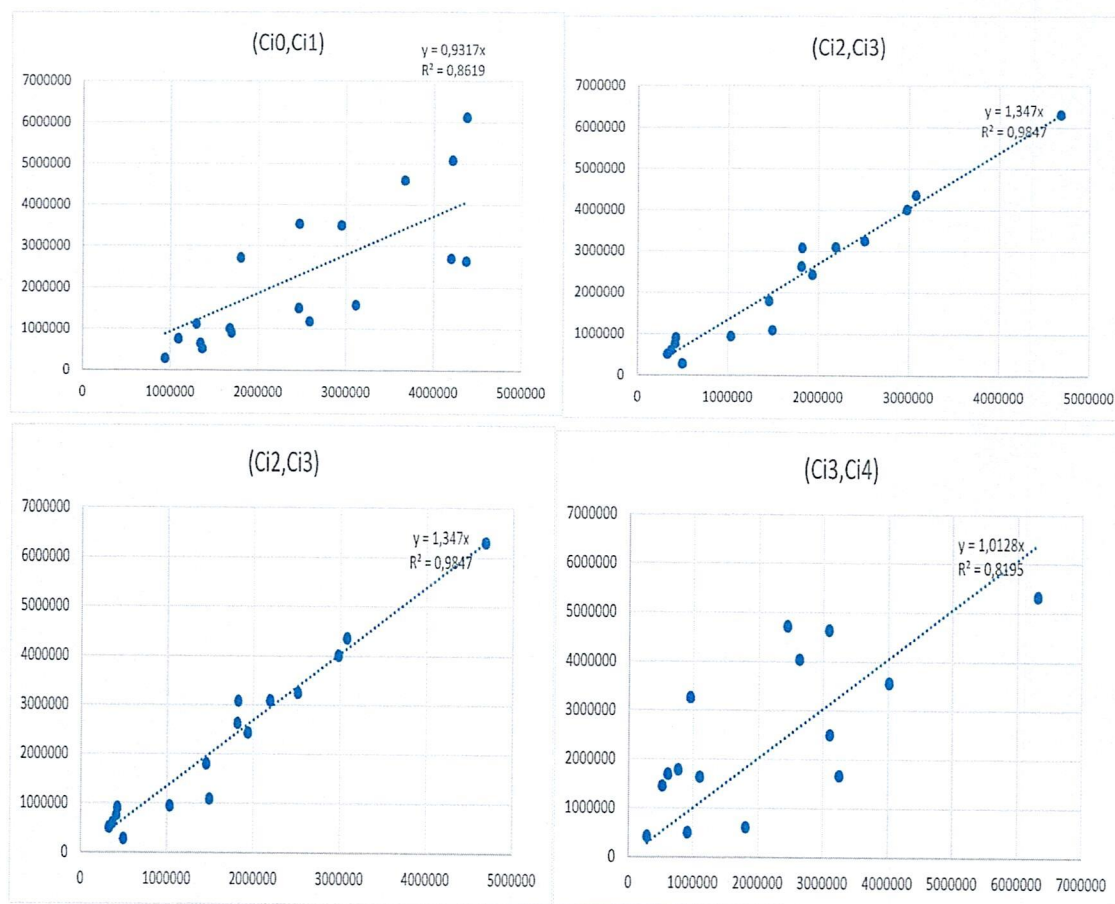
Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Pour que l'hypothèse du modèle soit vérifiée, il faut que pour toute année de développement j fixé, les représentations de $C_{i,j+1}$ en fonction de $C_{i,j}$ s'alignent sur une droite passant par l'origine de pente f_j . Dans notre cas, pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ nous obtenons les

Figure 9. Vérification de l'hypothèse de linéarité

graphiques de la figure 9 :

On constate que les points (C_{i0}, C_{i1}) , (C_{i1}, C_{i2}) , (C_{i2}, C_{i3}) , (C_{i3}, C_{i4}) sont alignés sur une



même droite et c'est seulement pour la première année de développement que certains points se détachent de la droite de régression. De plus, ces droites passent par l'origine. Concernant les coefficients de détermination, les valeurs obtenues sont toutes supérieures à 0.75. Nous avons donc une bonne qualité d'ajustement. Nous pouvons conclure que l'hypothèse (H2) de Chain Ladder est presque vérifiée pour les deux premières années de développement.

Validation du modèle de Chain Ladder : Backtesting (étude des Bonis/Malis)

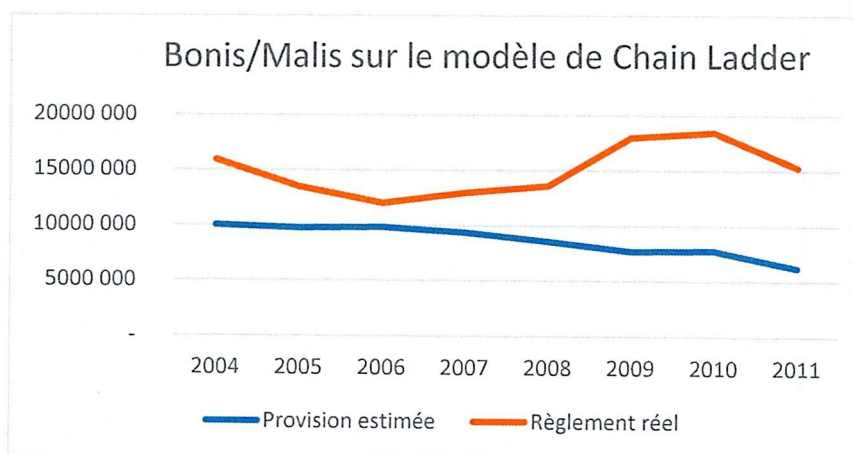
On dispose des encaissements observés réellement et on souhaite les comparer à la prévision obtenue du modèle. Rappelons que la partie inférieure de nos triangles complétés, représente pour les survenances 1985 à 2003, l'estimation des règlements cumulés des 19 prochaines années. Par exemple en 2004, la méthode Chain ladder prévoit un règlement de 10.003.602 contre 15.916.254,26 réellement réglés, soit un manque de 5.912.652,26. Plus globalement, nous avons le tableau et la figure ci-contre.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Tableau 5. Provision estimée par Chain Ladder et règlements réels

Année d'inventaire	Provision estimée	Règlement réel	Ecart	Type
2004	10 003 602	15 916 254	-22,81%	Mali
2005	9 759 443	13 463 181	-15,95%	Mali
2006	9 835 888	12 032 269	-10,04%	Mali
2007	9 366 352	12 949 684	-16,06%	Mali
2008	8 598 548	13 601 556	-22,54%	Mali
2009	7 714 062	17 975 701	-39,94%	Mali
2010	7 773 853	18 433 997	-40,68%	Mali
2011	6 220 030	15 271 404	-42,12%	Mali

Figure 10. Bonis/Malis sur le modèle de Chain Ladder



b. Méthode London Chain

Le Tableau 6 donne les valeurs estimées des paramètres de la méthode London Chain.

Tableau 6. Valeurs estimées des paramètres de la méthode London Chain

j	fj	aj	j	fj	aj
0	1	1	10	1,06971	24441,3
1	2,94365	12177,1	11	1,11526	-87112
2	2,06744	-282392	12	1,03163	75566,6
3	1,56632	-116605	13	0,94026	302582
4	1,28758	81480,5	14	0,94977	263499
5	1,20427	143754	15	1,01246	14916,7
6	1,19076	-40126	16	1,46111	-974992
7	1,38769	-433746	17	1,00113	65016,9
8	1,03938	408702	18	1,02721	0
9	1,03817	271842			

De ces paramètres, nous déduisons les valeurs estimées des charges ultimes et provisions consignées dans le Tableau 7.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Tableau 7. Résultats obtenus par la méthode London Chain

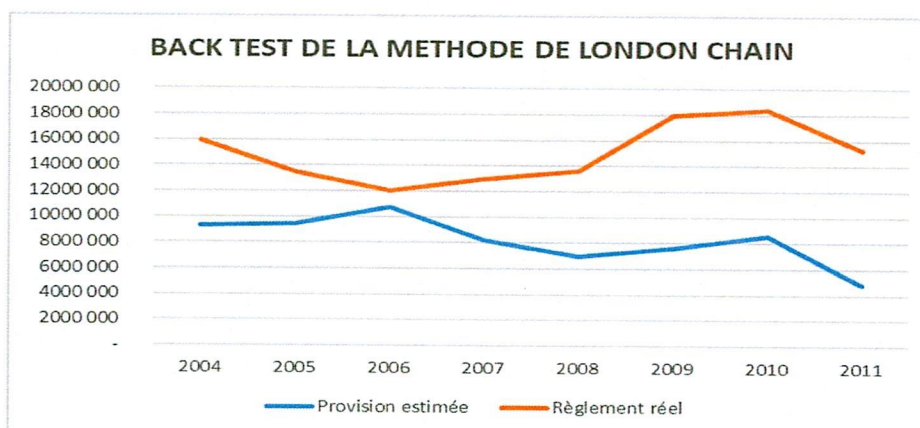
Année de survenance	Règlements Ultimes	Diagonale du triangle de Règlements	Provision RI
1985	3 410 346	3 410 346	0
1986	2 464 506	2 399 229	65 277
1987	4 179 431	3 999 184	180 247
1988	3 749 786	3 118 440	631 346
1989	3 798 819	3 097 575	701 243
1990	9 350 341	6 826 178	2 524 162
1991	6 912 408	5 143 573	1 768 834
1992	5 511 720	3 913 225	1 598 495
1993	8 009 926	5 185 206	2 824 720
1994	14 522 590	8 719 534	5 803 056
1995	7 477 074	4 078 250	3 398 823
1996	11 288 858	5 643 236	5 645 622
1997	11 618 683	4 510 930	7 107 754
1998	12 466 153	4 106 237	8 359 915
1999	19 170 856	5 157 838	14 013 018
2000	14 482 031	2 928 263	11 553 768
2001	10 776 959	1 432 260	9 344 699
2002	14 465 337	1 075 748	13 389 589
2003	11 738 532	299 430	11 439 102
Total	175 394 354	75 044 683	100 349 671

Le montant des réserves obtenus par la méthode London Chain est de **100.349.671** pour le triangle des règlements cumulés soit un montant de réserves supérieur à celui obtenu par la méthode de référence Chain ladder.

Tableau 8. Provision estimée par London Chain et Règlements réels

Année d'inventaire	Provision estimée	Règlement réel	Ecart	Type
2004	9 301 628	15 916 254	-41,56%	Mali
2005	9 450 144	13 463 181	-29,81%	Mali
2006	10 745 599	12 032 269	-10,69%	Mali
2007	8 228 329	12 949 684	-36,46%	Mali
2008	6 991 689	13 601 556	-48,60%	Mali
2009	7 610 539	17 975 701	-57,66%	Mali
2010	8 568 314	18 433 997	-53,52%	Mali
2011	4 800 978	15 271 404	-68,56%	Mali

Figure 11. Bonis/Malis sur le modèle de London Chain



c. Méthode des moindres carrés de De Vylder

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Le Tableau 9 présente aux colonnes 2 et 3 les paramètres estimés de la méthode de De Vylder et à la dernière colonne les provisions déduites.

Tableau 9. Résultats obtenus par la méthode de De Vylder

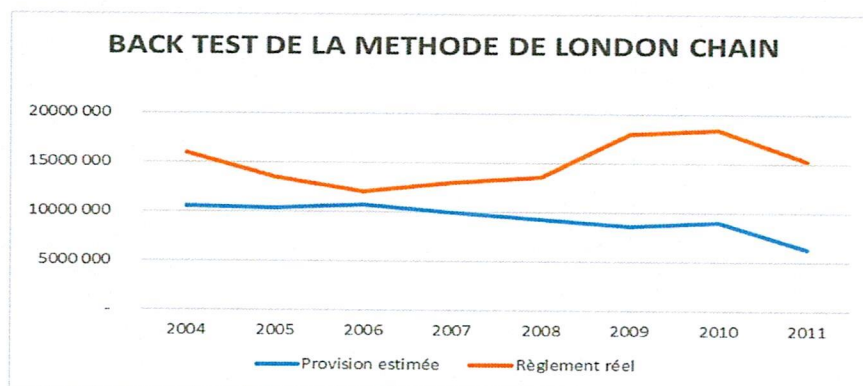
i\j	xi	yj	Ri	i\j	xi	yj	Ri	i\j	xi	yj	Ri	
0	2954858,9	0,02	0	7	5611168,4	0,09	1600354,2	14	22515768	0,04	16508320	
1	2135528,6	0,05	65282,895	8	8154635,2	0,07	2840074,7	15	16437262	0,01	13010457	
2	4464331,2	0,05	253184,54	9	15868793	0,06	6303667,7	16	11897736	0,13	10124819	
3	3744742,7	0,06	706676,23	10	7767577,2	0,05	3513032	17	16662189	0,03	15033207	
4	3447297	0,06	700889,5	11	12631174	0,06	6569444,3	18	14588940	0,03	13833769	
5	8835972,9	0,06	2113243,8	12	12688884	0,03	7784370,4	Total=			111977569	
6	7235223,1	0,06	1813480,5	13	13766330	0,01	9203295,9					

Le montant estimé des réserves est de **111.977.569**

Tableau 10. Provision estimée par De Vylder et Règlements réels

Année d'inventaire	Provision estimée	Règlement réel	Ecart	Type
2004	10 485 759	15 916 254	-34,12%	Mali
2005	10 381 384	13 463 181	-22,89%	Mali
2006	10 676 460	12 032 269	-11,27%	Mali
2007	9 937 322	12 949 684	-23,26%	Mali
2008	9 213 534	13 601 556	-32,26%	Mali
2009	8 579 412	17 975 701	-52,27%	Mali
2010	9 039 194	18 433 997	-50,96%	Mali
2011	6 290 753	15 271 404	-58,81%	Mali

Figure 12. Bonis/Malis sur le modèle de De Vylder



3.3.2 Application des méthodes stochastiques envisagées

a. Le modèle de Mack

La méthode de Mack est appliquée au triangle des règlements. Les résultats obtenus sont consignés dans la figure 13.

Figure 13. Résultats obtenus par la méthode de Mack pour le triangle des règlements

	Latest	Dev.	To. Date	Ultimate	IBNR	Mack. S. E	CV(IBNR)
1	3,410,346	1.0000		3,410,346	0	0	NaN
2	2,399,229	0.9735		2,464,506	65,277	72,404	1.109
3	3,999,184	0.9503		4,208,327	209,142	110,547	0.529
4	3,118,440	0.8489		3,673,356	554,916	613,245	1.105
5	3,097,575	0.8342		3,713,195	615,620	618,075	1.004
6	6,826,178	0.7989		8,544,276	1,718,098	1,163,863	0.677
7	5,143,573	0.7755		6,632,971	1,489,398	1,009,739	0.678
8	3,913,225	0.7360		5,317,059	1,403,834	894,961	0.638
9	5,185,206	0.6764		7,666,164	2,480,958	1,192,888	0.481
10	8,719,534	0.6278		13,889,245	5,169,711	1,943,399	0.376
11	4,078,250	0.5607		7,273,296	3,195,046	1,480,518	0.463
12	5,643,236	0.4747		11,887,714	6,244,477	2,386,913	0.382
13	4,510,930	0.3898		11,573,675	7,062,745	2,491,336	0.353
14	4,106,237	0.3322		12,361,777	8,255,540	2,674,941	0.324
15	5,157,838	0.2595		19,872,745	14,714,907	4,038,042	0.274
16	2,928,263	0.1938		15,107,768	12,179,504	3,577,021	0.294
17	1,432,260	0.1324		10,817,518	9,385,258	3,104,751	0.331
18	1,075,748	0.0797		13,499,659	12,423,911	3,943,991	0.317
19	299,430	0.0266		11,252,128	10,952,698	4,817,745	0.440

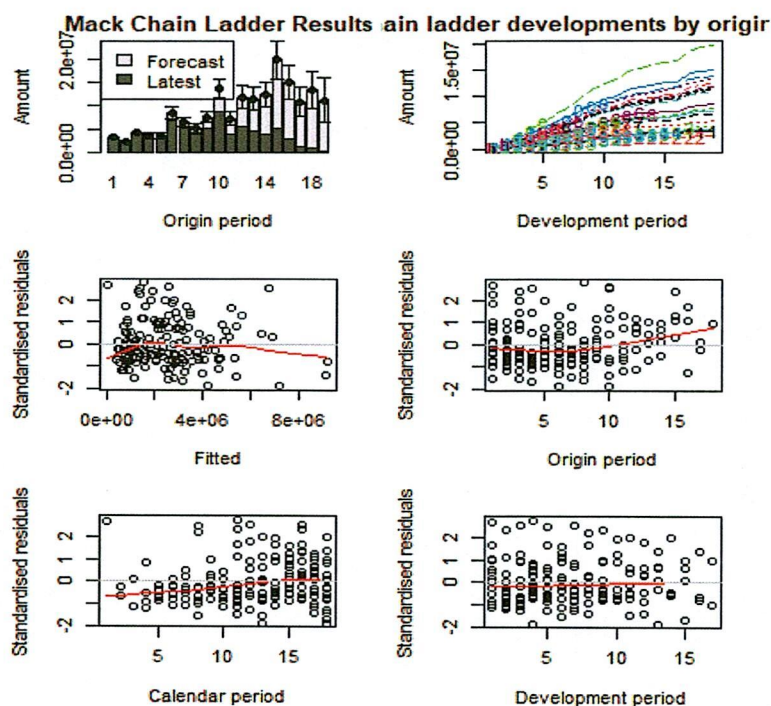
Totals
 Latest: 75,044,683.08
 Dev: 0.43
 Ultimate: 173,165,725.57
 IBNR: 98,121,042.49
 Mack. S. E 19,527,040.23
 CV(IBNR): 0.20

Avec cette méthode, on retrouve l'estimation du montant total de provisions de la méthode Chain Ladder soit un montant de **98.121.042,5** et l'incertitude autour de cette prédiction est de **19.527.040,23** qui représente **20%** du montant de provision.

Vérification des hypothèses du modèle de Mack

Les deux premières hypothèses sont les mêmes que celles du modèle Chain Ladder classique. Pour que la troisième hypothèse portant sur la variance de $C_{i,j}$ soit vérifiée, pour j fixé, il faut que le graphe des résidus normalisés $\hat{\varepsilon}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{\hat{C}_{i,j}}}$, $i = 1, \dots, n - j$ ne présente aucune structure non aléatoire, en particulier pas d tendance. Dans notre cas, pour $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ les résidus sont représentés à la figure 14

Figure 14. Analyse graphique des résidus standardisés



Il n'y a aucune tendance manifeste permettant de rejeter l'hypothèse 3.

b. Modèle Munich Chain Ladder

La méthode de Munich Chain Ladder est appliquée au triangle des règlements. Les résultats obtenus sont consignés dans la figure 15.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Figure 15. Résultats obtenus par la méthode de Munich Chain

	Latest Paid	Latest Incurred	Latest P/I Ratio	Ult. Paid	Ult. Incurred	Ult. P/I Ratio
1	3,410,346	3,422,333	0.9965	3,410,346	3,422,333	0.996
2	2,399,229	2,509,801	0.9559	2,476,449	2,542,852	0.974
3	3,999,184	3,302,989	1.2108	4,128,195	4,303,286	0.959
4	3,118,440	4,054,533	0.7691	3,936,717	4,031,340	0.977
5	3,097,575	3,129,834	0.9897	3,715,428	3,830,742	0.970
6	6,826,178	6,691,714	1.0201	8,611,922	8,879,228	0.970
7	5,143,573	5,899,281	0.8719	6,884,765	7,100,896	0.970
8	3,913,225	4,395,590	0.8903	5,473,208	5,644,276	0.970
9	5,185,206	5,481,088	0.9460	7,834,733	8,078,971	0.970
10	8,719,534	9,737,049	0.8955	14,425,227	14,874,943	0.970
11	4,078,250	5,019,044	0.8126	8,023,297	8,273,419	0.970
12	5,643,236	4,703,910	1.1997	11,531,936	11,891,436	0.970
13	4,510,930	4,021,832	1.1216	11,600,781	11,962,428	0.970
14	4,106,237	6,394,440	0.6422	13,467,307	13,887,141	0.970
15	5,157,838	5,327,465	0.9682	20,077,842	20,703,756	0.970
16	2,928,263	4,365,634	0.6708	15,632,644	16,119,981	0.970
17	1,432,260	2,140,379	0.6692	11,098,931	11,444,933	0.970
18	1,075,748	4,600,295	0.2338	14,815,978	15,277,857	0.970
19	299,430	4,544,975	0.0659	12,864,211	13,265,244	0.970

Totals

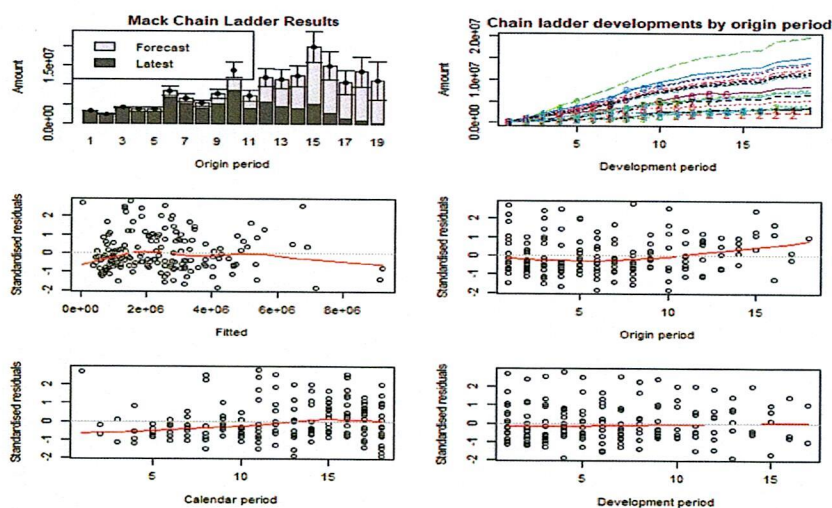
	Paid	Incurred	P/I Ratio
Latest:	7.5e+07	9.0e+07	0.84
Ultimate:	1.8e+08	1.9e+08	0.97

```
> print("provision sur le triangle de règlements")
[1] "provision sur le triangle de règlements"
> sum(MNCL$MCLPaid[,19]-diag(cij[,19:1]))
[1] 104965233
```

Avec cette méthode, on trouve pour montant estimé des provisions **104.965.233**

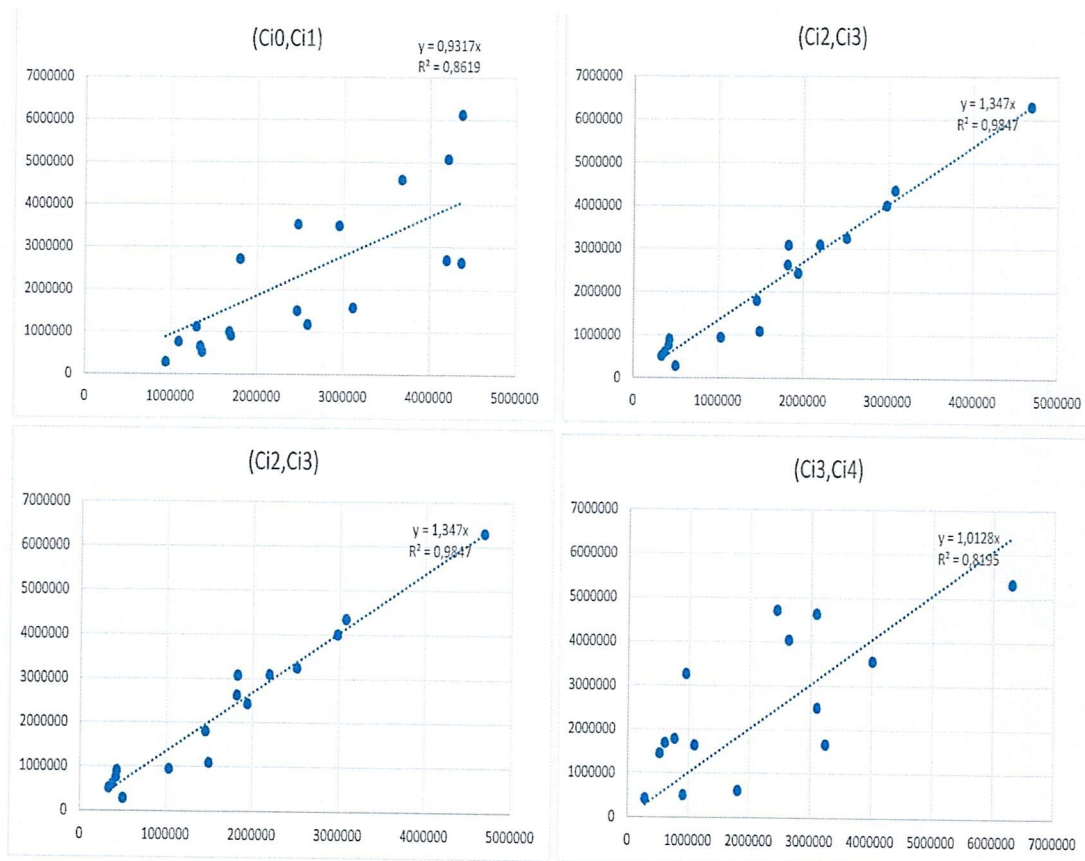
Vérification des hypothèses du modèle de Munich Chain ladder

Figure 16. Analyse graphique des résidus standardisés



Validation de la seconde hypothèse sur le triangle de charges

Figure 17. Vérification de l'hypothèse de linéarité



On constate que les points (Ci_0, Ci_1) , (Ci_1, Ci_2) , (Ci_2, Ci_3) , (Ci_3, Ci_4) sont alignés sur une même droite.

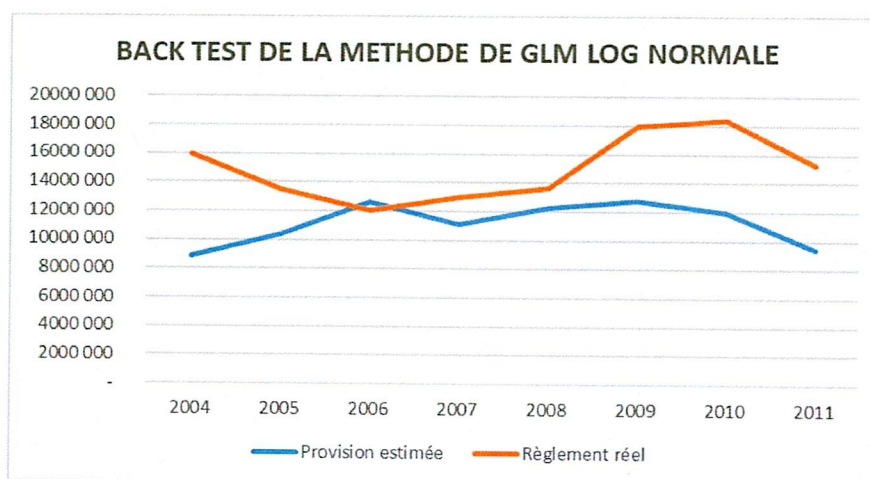
c. Modèle du GLM avec la fonction de lien Log normale

Le Tableau 13 présente les résultats obtenus par la méthode des Modèles Linéaires Généralisés (GLM) et la comparaison faite directement avec les règlements réels avec la fonction de lien log normale. Notons qu'en utilisant les autres fonctions de lien nous n'avons pas de résultats à cause de la présence des nombres négatifs dans le triangle de règlements.

Tableau 11. Provision estimée par le Glm Log normale et les Règlements réels

Année d'inventaire	Provision estimée	Règlement réel	Ecart	Type
2004	8 841 571	15 916 254	-44,45%	Mali
2005	10 415 642	13 463 181	-22,64%	Mali
2006	12 651 496	12 032 269	5,15%	Boni
2007	11 127 996	12 949 684	-14,07%	Mali
2008	12 229 998	13 601 556	-10,08%	Mali
2009	12 755 003	17 975 701	-29,04%	Mali
2010	11 946 019	18 433 997	-35,20%	Mali
2011	9 424 527	15 271 404	-38,29%	Mali

Figure 18. Bonis/Malis sur le modèle Glm Log normale



La courbe des règlements réels reste presque toujours au-dessus de celle de la provision estimée par GLM Log Normale. on constate toujours que nous n'avons les malis et pas de bonis or mis l'année 2006.

d. Modèle du Bootstrap

La figure 19 regroupe les provisions obtenues par le modèle Bootstrap qui est relativement proche de celle obtenue par le modèle de Chain Ladder.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Figure 19. Résultats Bootstrap

	Latest	Mean Ultimate	Mean IBNR	IBNR. S.E	IBNR 75%	IBNR 95%
1	3,410,346	3,410,346	0	0	0	0
2	2,399,229	2,459,741	60,512	124,789	81,717	321,580
3	3,999,184	4,211,237	212,053	250,179	321,852	691,958
4	3,118,440	3,665,655	547,215	346,842	735,699	1,184,199
5	3,097,575	3,724,926	627,351	394,902	822,940	1,333,864
6	6,826,178	8,556,332	1,730,154	715,318	2,168,837	3,045,726
7	5,143,573	6,633,679	1,490,106	654,344	1,829,156	2,823,976
8	3,913,225	5,323,805	1,410,581	599,071	1,766,684	2,454,634
9	5,185,206	7,715,910	2,530,703	847,114	2,997,929	4,086,231
10	8,719,534	13,951,853	5,232,319	1,397,084	6,073,552	7,806,759
11	4,078,250	7,285,773	3,207,523	1,000,901	3,778,658	5,117,451
12	5,643,236	11,928,997	6,285,761	1,520,048	7,272,298	8,957,121
13	4,510,930	11,598,642	7,087,712	1,713,091	8,019,720	10,091,776
14	4,106,237	12,371,462	8,265,225	2,022,592	9,533,053	11,974,199
15	5,157,838	20,049,573	14,891,735	3,063,197	16,803,184	20,243,367
16	2,928,263	15,097,152	12,168,889	3,160,821	13,941,146	17,802,793
17	1,432,260	11,027,270	9,595,010	3,125,751	11,483,669	15,280,830
18	1,075,748	13,462,091	12,386,343	4,607,211	14,816,893	20,721,416
19	299,430	11,583,628	11,284,198	7,577,428	14,462,436	27,108,401

Totals
 Latest: 7.50e+07
 Mean Ultimate: 1.74e+08
 Mean IBNR: 9.90e+07
 IBNR. S.E 1.58e+07
 Total IBNR 75%: 1.09e+08

Le montant de la provision estimée par la méthode de Bootstrap est de 99.000.000 qui est très proche du montant obtenu par le modèle de Chain Ladder (98.121.042,5).

CHAPITRE 4

RISQUE DE MODELE EN PROVISIONNEMENT

La littérature actuelle propose quelques méthodes théoriques de quantification du risque de modèle. Chacune de ces méthodes propose une approche différente pour ce risque mais le fondement reste le même : disposer d'une mesure de risque ρ et d'une classe de modèles qui sont des candidats potentiels pour l'évaluation du risque considéré.

Nicole Branger et Christian Schlag propose dans leur article [22] une **approche bayésienne** du risque de modèle en prenant compte de l'ensemble des modèles et l'ensemble des informations a priori sur les paramètres de chacun de ces modèles, le tout pondéré par des probabilités conditionnelles ou non conditionnelles.

Philipp Sibbertsen, Gerhard Stahl et Corinna Ledtke propose dans leur article [29] une approche de quantification, dite « **approche du pire des cas** », basée sur le modèle possédant la valeur de mesure de risque la plus élevée. Ils étudient la différence entre ce modèle et les autres modèles de la classe.

Enfin, Pauline Barrieu et Giacomo Scandolo propose dans leur article [25] une approche dite de « **modèle de référence** », qui reprend l'idée générale de la seconde approche. Cette approche propose de quantifier le risque de modèle par le biais deux mesures de risque de modèle basée sur le modèle de référence et les autres modèles étudiés.

Nous allons commencer par présenter l'approche proposée par Pauline Barrieu et Giacomo Scandolo dans leur article [25] c'est-à-dire celle appelée « **modèle de référence** » en particulier pour quantifier le risque de modèle car elle propose un développement plus intéressant que l'approche dite « **approche du pire des cas** », et la difficulté de l'utilisation de l'approche bayésienne réside dans la détermination des probabilités conditionnelles et non conditionnelles relatives à chaque modèle de la classe.

Avant de présenter l'approche dite de « **modèle de référence** », commençons par rappeler la définition et les propriétés d'une mesure de risque, et présenter en particulier la Value at Risk et la Tail Value at Risk.

4.1. Mesures de risque : Définitions et propriétés

Le but de la mesure de risque est généralement de pouvoir représenter par un chiffre réel une incertitude ou une grandeur dont la valeur est inconnue, à l'aide d'un étalon de mesure adéquat, de manière à pouvoir exprimer l'exposition au risque de cette grandeur.

Une mesure de risque ρ est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires et qui prend ses valeurs sur $\mathbb{R}$.

Considérons deux risques X et Y . Voici quelques propriétés associées à la mesure de risque :

➤ **Invariance en loi** : Si $X = Y$, alors $\rho(X) = \rho(Y)$

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

L'interprétation de cette propriété est que deux risques identiques nécessitent le même capital pour les couvrir.

➤ Invariance par translation : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $\rho(X + a) = \rho(X) + a$

Cette propriété peut s'interpréter dans la réalité comme : si le montant a est retranché à la position financière et investie d'une manière sans risque, alors le capital requis est réduit du même montant.

➤ Monotonie : Si $X \leq Y$, alors $\rho(X) \leq \rho(Y)$

La monotonie traduit le fait que si le montant résultat d'un risque est systématiquement (au sens presque sûr) inférieur à celui résultant d'un autre risque, le capital nécessaire à couvrir le premier risque ne saurait être supérieur à celui nécessaire pour couvrir le second.

➤ Convexité : Pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a : $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$

La propriété de convexité peut s'interpréter dans la réalité comme une propriété de diversification : si on diversifie en dépensant la fraction λ sur une première possibilité X et le reste sur une seconde Y , on obtient la quantité $(\lambda X + (1 - \lambda)Y)$. Ainsi la propriété de convexité donne un sens précis à l'idée que la diversification ne doit pas augmenter le risque.

➤ Homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a : $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

La propriété d'homogénéité peut s'interpréter par la proportionnalité du risque à la taille du portefeuille (par exemple).

➤ Sous-additivité : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

La propriété de sous-additivité peut s'interpréter également comme une réduction du risque par la diversification.

Il y a plusieurs classes de mesure. Cette classification est basée sur les propriétés vérifiées par les mesures de risque.

- Une mesure de risque est dite « **monétaire** » si elle est invariante en loi, monotone et invariante par translation.
- Une mesure de risque est dite « **convexe** » si elle est monétaire et convexe.
- Une mesure de risque est dite « **cohérente** » si elle est monétaire, homogène et sous-additive.

Nous allons ici nous intéresser seulement à deux mesures de risque en particulier : la **Value at Risk** et la **Tail Value at Risk**.

4.1.1 La Value at Risk (VaR)

La Valuation du risque ou **Value at Risk (VaR)** en anglais est une mesure de risque correspondante à un quantile, le plus souvent élevé, associé à la distribution de perte du risque. Pour un certain niveau de probabilité p , elle s'écrit :

$VaR_p(Y) = \inf \{a \in \mathbb{R}, P(Y \leq a) \geq p\} = F_Y^{-1}(p)$, où F_Y désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire Y .

Un des intérêts de cette mesure est qu'elle donne une idée de la queue de distribution, qui peut ne pas être négligeable lorsque l'on s'extrait du cadre gaussien. En revanche, cette mesure présente quelques inconvénients majeurs :

- Elle ne vérifie pas la propriété de sous additivité, elle n'est donc pas une mesure de risque cohérente. Cet aspect est particulièrement gênant en Assurance car les assureurs travaillent sur plusieurs branches bénéficiant ainsi d'un effet de diversification dont la VaR n'est pas capable de rendre compte
- Elle donne le niveau de provision nécessaire pour couvrir toute la sinistralité inférieure au quantile p ; mais elle ne fournit aucune information sur la réalisation de la variable au-delà de ce seuil.

Les critiques précédentes nous amènent à présenter une autre mesure de risque utilisée en assurance et qui présente l'intérêt d'être cohérente et de fournir une information sur la distribution au-delà du seuil p choisie.

4.1.2 La Tail Value at Risk (TVaR)

La Tail Value at Risk (**TVaR**) est une mesure de risque associée à la Value at Risk. Elle permet de quantifier la perte lorsque la VaR est dépassée et plus exactement correspond à la moyenne des VaR de niveau supérieur à p . Où p correspond au quantile, $p \in [0,1]$.

$$\text{On a : } TVaR_p(Y) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_u(Y) du = E[Y | Y \geq F_Y^{-1}(p)],$$

Où F_Y désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire Y .

Ainsi, la TVaR est la moyenne des VaR de niveau de confiance supérieur ou égal à p .

Autrement dit, il s'agit de la traduction mathématique du concept de "**perte moyenne dans les pires (1 - p) % des cas**".

Au même niveau de sécurité, la TVaR est un étalon de mesure de risque plus prudent que la VaR. Dans la réalité, une distribution des dommages présentera certainement quelques pertes extrêmement élevées mais dont la probabilité est très faible. Pour ces cas, la TVaR est plus appropriée que la VaR car elle intègre aussi l'ampleur de ces pertes extrêmes. Contrairement à la VaR, la TVaR quantifie le coût moyen de l'un des 100. p % pires événements. En pratique, on constate que la TVaR est plus stable que la VaR. Malgré tous les avantages de la TVaR par rapport à la VaR, la mesure de risque utilisée pour déterminer le capital de solvabilité requis en pratique est la VaR.

4.1.3 Choix de la mesure de risque

Le choix de la mesure de risque pour quantifier le risque de modèle doit se faire de manière cohérente selon que l'on étudie les modèles dans un cadre individuel ou un cadre collectif (modèle agrégé des risques).

Dans un cadre individuel, l'utilisation de la VaR ou de la $TVaR$ permet d'obtenir des informations concernant la distribution du risque.

En revanche lorsque l'on s'intéresse à l'étude de l'agrégation de plusieurs risques, le choix de la bonne mesure de risque est primordial pour prendre en compte la diversification des risques. Dans certains cas, la VaR n'est pas sous-additive.

On peut citer à titre d'exemple l'agrégation de deux risques suivant respectivement une loi de Pareto. Dans ce cas, La VaR de la somme des deux risques est supérieure à la somme des VaR individuelle de chaque risque. Par conséquent l'utilisation de la $TVaR$ est alors plus pertinente dans ce cadre.

4.2 Quantification du risque de modèle :

4.2.1 Approche dite de « modèle de référence »

Soit une mesure de risque ρ , un risque Y , Y_0 le risque associé au modèle de référence.

Le choix du modèle de référence doit être fait statistiquement. En effet, parmi l'ensemble des modèles choisis dans notre classe notée $\mathcal{L}$, un modèle peut se révéler être le plus adéquat par la vérification de ses hypothèses et le calibrage de ses paramètres. Ce modèle sera donc sélectionné comme le modèle de référence.

Nous nous essayons de quantifier le risque de modèle en proposant deux mesures de ce risque : la mesure absolue du risque de modèle notée AM , et la mesure relative du risque de modèle notée RM . L'approche propose d'obtenir une valeur globale pour ces deux mesures en fonction du modèle de référence.

a. La mesure absolue

La mesure absolue du risque de modèle est définie par :

$$AM = \sup_i \{AM_i\} = \sup_i \left\{ \frac{\rho(Y_i)}{\rho(Y_0)} - 1 \right\} = \frac{\overline{\rho}(\mathcal{L})}{\rho(Y_0)} - 1$$

b. la mesure relative

La mesure relative du risque de modèle est définie par :

$$RM = \sup_i \{RM_i\} = \sup_i \left\{ \frac{\rho(Y_i) - \rho(Y_0)}{\overline{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})} \right\} = \frac{\rho(\mathcal{L}) - \rho(Y_0)}{\overline{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})}$$

Avec: $\underline{\rho}(\mathcal{L}) = \inf \{ \rho(Y_i) | Y_i \in \mathcal{L} \}, i = 0, \dots, \text{card}(\mathcal{L}) - 1$

$\overline{\rho}(\mathcal{L}) = \sup \{ \rho(Y_i) | Y_i \in \mathcal{L} \}, i = 0, \dots, \text{card}(\mathcal{L}) - 1$

$\rho(Y_0)$ = Mesure de risque du modèle de référence

Cette mesure donne la position relative du modèle de référence sur l'intervalle $[\max_{Y_i \in \mathcal{L}} \rho(Y_i), \min_{Y_i \in \mathcal{L}} \rho(Y_i)]$, en d'autres termes elle permet de définir si le modèle de référence est plus proche du meilleur scénario ou du pire. De même, cette mesure est nulle si le modèle de référence correspond au pire scénario et tend vers 1 lorsque ce dernier se rapproche du meilleur scénario

L'application de cette approche présente toutes fois certaines limites :

- La première limite est de choisir une classe de modèle trop restreinte et donc de risquer de ne pas contenir dans la classe étudiée un modèle satisfaisant que l'on considère comme le modèle de référence.
- La seconde limite est de choisir une classe trop vaste contenant des modèles inadaptés et qui peut conduire à une surestimation significative du risque et par conséquent du risque de modèle.

4.2.2 L'approche 'worst case'

Cette approche consiste à mesurer l'erreur maximale commise en choisissant Y_0 comme modèle de référence par rapport à un ensemble de modèle $\mathcal{L}$ (contenant le modèle de référence et hypothétiquement le vrai modèle). Plusieurs mesures ont été proposées afin d'évaluer cette erreur. Dans cette section, les notations précédentes sont conservées.

Kerkhof et Al propose une mesure du risque de modèle "*worst case*". Le principe est de comparer la mesure de risque obtenue avec le modèle de référence avec celle obtenue avec le pire modèle, celui qui nécessite le plus de capital réglementaire.

Définition : La mesure "*worst case*" est définie comme suit :

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

$$\mathfrak{R}(Y_0) = \max_{Y_i \in \mathcal{L}} \rho(Y_i) - \rho(Y_0)$$

Cette approche est très prudente dans la mesure où l'erreur est évaluée par rapport au pire des cas. Cette méthode ne s'intéresse en aucun cas au vrai modèle qui pourrait être bien moins conservateur et dont la mesure du capital réglementaire est *a priori* moins importante que celle obtenue avec le "**pire modèle**".

Remarque :

- Nous pouvons constater que si le modèle de référence est celui qui requiert le plus de capital réglementaire au vu de la mesure sélectionnée (généralement la VaR) alors la mesure de l'erreur de modèle devient nulle. En effet, la réserve en capital requise par le modèle de référence est déjà maximale dans ce cas et l'erreur de modèle n'est donc pas sous-estimée.
- Une hypothèse importante dans cette approche est que le vrai modèle appartienne à l'ensemble de ces modèles. Le choix de l'ensemble de modèle n'est pas anodin. Si l'ensemble est trop petit, la probabilité que le vrai modèle soit dans cette ensemble sera petite. A l'inverse un ensemble grand pourra contenir des modèles très éloignés du vrai modèle et la mesure "*worst case*" pourrait devenir très grande.

Cont a proposé une autre mesure du risque de modèle basée sur le pire scénario.

Définition. La mesure de Cont est définie par :

$$\mathfrak{R}(Y_0) = \max_{Y_i \in \mathcal{L}} \rho(Y_i) - \min_{Y_i \in \mathcal{L}} \rho(Y_i)$$

Cette mesure est indépendante du modèle de référence. C'est une mesure très conservatrice qui est très coûteuse en pratique car le capital réservé est maximal. Ce n'est donc pas une approche permettant d'optimiser l'allocation de capital.

Cette approche présente un avantage majeur, sa simplicité. En effet, la mise en place est relativement aisée ; dès lors que les modèles ont été choisis, il faut calculer le capital réglementaire requis pour chacun des modèles et la mesure du risque de modèle est alors immédiate par l'une des formules ci-dessus.

Cependant, cette approche présente plusieurs inconvénients notamment un inconvénient économique. Cette approche requiert un ensemble de modèle qui soient en adéquation avec les hypothèses faites sur notre quantité d'intérêt et qui s'adaptent bien aux données. Comme nous l'avons expliqué auparavant, ce choix présente une première difficulté, le nombre de modèles sélectionnés. Par ailleurs, pour que la théorie ci-dessus soit valable, il est nécessaire que le vrai modèle appartienne à cet ensemble, or ne connaissant pas ce modèle, cette hypothèse est difficilement vérifiable. Le choix du modèle de référence est aussi capital puisque que ce dernier influence énormément le calcul de l'erreur de modèle.

4.3 Modèle retenu sur les données en 2003

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

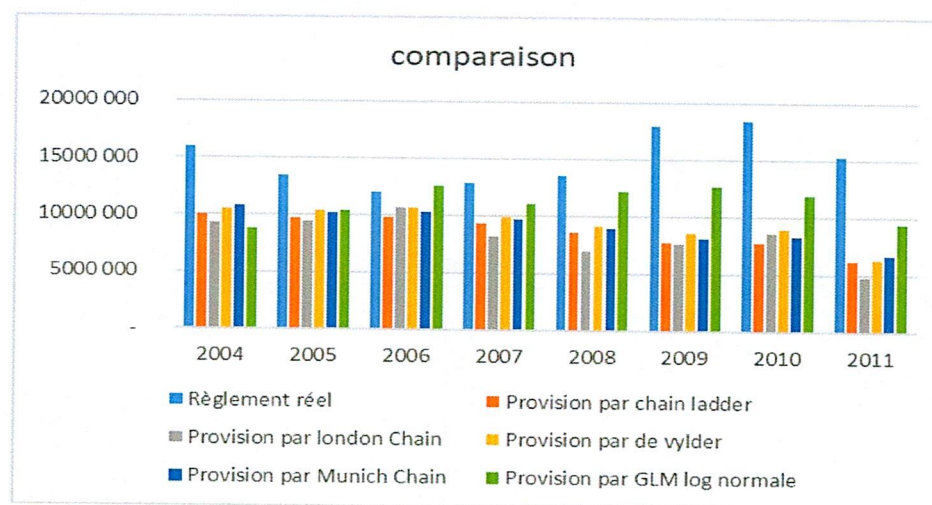
Dans cette section, il est question pour nous de choisir un modèle parmi les différents modèles présentés ce qui s'apparente le mieux avec nos données, lorsque nous avons un triangle de règlements qui va de 1985 à 2003. En justifiant notre choix et en essayant, de mesurer aussi l'erreur commise en faisant ce choix. Il faut tout d'abord noter que provisionner cette branche n'est pas facile car elle présente des développements longs, des paiements volatiles et une grande incertitude. Du coup les modèles classiques ne produisent que les malis.

Nous présentons dans le Tableau 12 les résultats de la projection dans le temps des différents modèles appliqués sur le triangle de règlements de 1985 jusqu'en 2003 et comparons avec les règlements réels futurs. Avec pour objectif de choisir le modèle qui se rapproche le mieux de la réalité en terme d'optimisation.

Tableau 12. Provision estimée et Règlement réel

Année d'inventaire	Règlement réel	Provision par chain ladder	Provision par london Chain	Provision par de vylder	Provision par Munich Chain	Provision par GLM log normale
2004	15 916 254	10 003 602	9 301 628	10 485 759	10 791 676	8 841 571
2005	13 463 181	9 759 443	9 450 144	10 381 384	10 212 397	10 415 642
2006	12 032 269	9 835 888	10 745 599	10 676 460	10 317 445	12 651 496
2007	12 949 684	9 366 352	8 228 329	9 937 322	9 781 339	11 127 996
2008	13 601 556	8 598 548	6 991 689	9 213 534	9 014 343	12 229 998
2009	17 975 701	7 714 062	7 610 539	8 579 412	8 142 387	12 755 003
2010	18 433 997	7 773 853	8 568 314	9 039 194	8 324 490	11 946 019
2011	15 271 404	6 220 030	4 800 978	6 290 753	6 709 314	9 424 527

Figure 20. Comparaison des provisions estimées par les différents modèles aux Règlements réels



La figure 20 nous fait remarquer que le modèle de provisionnement qui donne une provision qui semble proche des règlements réels est le modèle **GLM Log Normal** qui permet d'obtenir en 2006 un boni. Nous voyons tous qu'il est difficile de trouver un modèle de provisionnement vraiment adéquat pour nos données.

Le modèle dit **log-normal** qui n'est autre qu'une simulation des provisions totales à l'aide d'une loi log-normale sera le modèle de référence dans cette étude puisque c'est le modèle

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

qui est souvent utilisé en pratique pour évaluer le coefficient de variation des provisions estimées conformément aux exigences réglementaires. Les paramètres de la loi log-normale sont estimés par le modèle de Mack. De plus c'est le modèle qui semblait s'adapter le mieux avec nos données.

Ainsi, au vu de tests d'adéquation mentionnés ci-dessous, même si la distribution des provisions n'est pas identique à celle du bootstrap Mack, elle s'en approche fortement.

Nous présentons ci-dessous quelques statistiques mesurées sur la distribution des provisions obtenues à l'aide de ce modèle, en particulier le quantile à 99.5% qui servira de mesure de référence.

Tableau 13. Paramètres de la loi log-normale

Loi log-normale	Paramètres de la loi		Moyenne Mack	Ecart-type Mack	VaR 99.5%
	μ	σ^2			
	18.51	0.2	98 118 494	19 526 753	191 000 000

Remarque :

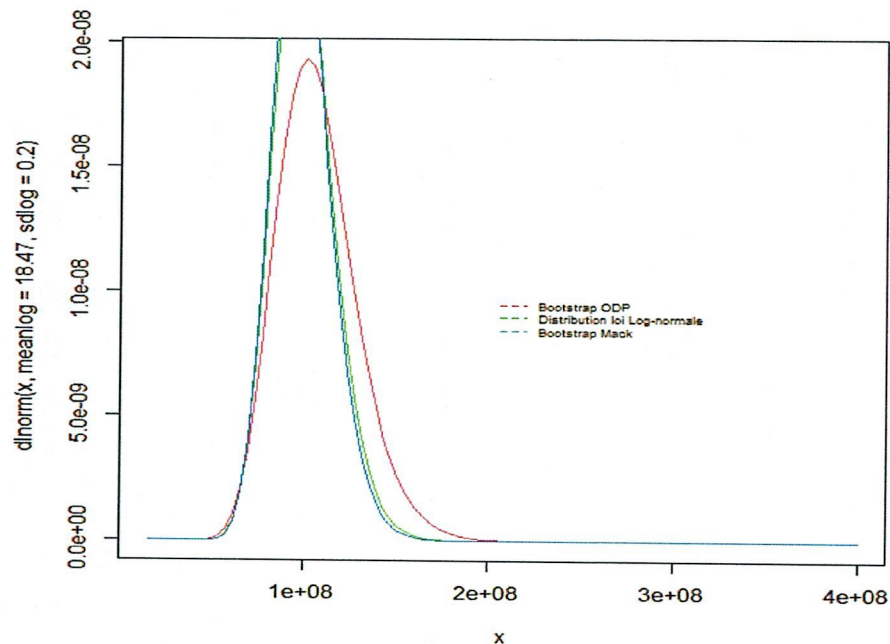
Il est à noter que le risque sous-jacent ici est une sous-estimation des provisions due à un modèle mal spécifié. Ainsi, nous ne nous intéressons ici, non plus au quantile à 0.5% comme pour les actifs, mais au quantile à 99.5%.

Ce modèle est choisi comme référence de par sa simplicité de mise en oeuvre. En effet, ce modèle assure des résultats fiables au vu de nombreux tests de validation réalisés en interne et un temps de calcul optimal.

Nous constatons que le modèle log-normal est très proche du modèle de Mack mais qu'il diffère des autres modèles notamment au niveau de la queue droite de la distribution qui est plus fine. Les tests d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling entre les différentes distributions et la loi log-normale confirme ce résultat puisque seule la distribution issue du bootstrap Mack ne permet pas de rejeter l'hypothèse d'adéquation à la loi log-normale.

Pour vérifier le bien-fondé de ce modèle, nous représentons ci-dessous les densités estimées des provisions finales de trois modèles : le modèle bootstrap Mack avec distribution prédictive Gamma, le modèle bootstrap ODP avec distribution prédictive Log-normale.

Figure 21. Densités des distributions



On a donc l'évaluation de l'erreur de modèle suivante :

Tableau 14. Erreur de modèle worst case

	Bootstrap Mack	Bootstrap ODP
AM	0.43%	1.02%

4.4 Modèle retenu sur les données en 2007

Il est question ici de trouver parmi les différents modèles présenter, déterministes comme stochastiques, le modèle qui s'apparente le plus avec nos données c'est à dire celui qui estime le mieux la provision, en convergeant le mieux vers les règlements réels. En justifiant notre choix et en essayant, de mesurer aussi l'erreur commise en faisant ce choix.

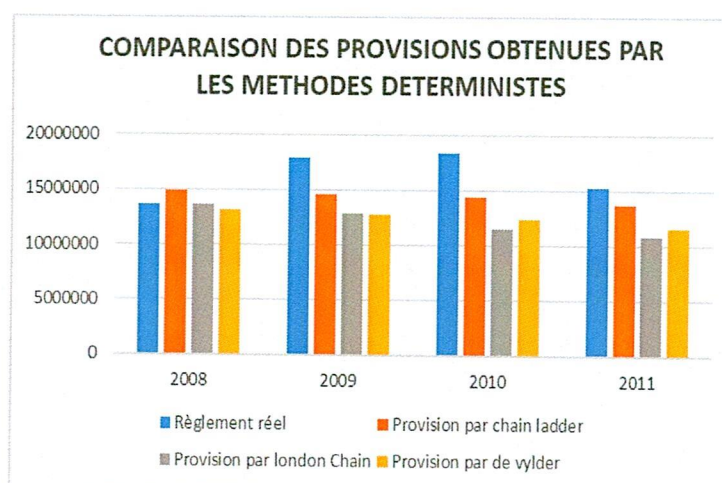
Nous présentons dans le Tableau 13 les résultats de la projection dans le temps des différents modèles déterministes appliqués sur le triangle de règlements de 1985 jusqu'en 2007 et comparons avec les règlements réels.

Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

Tableau 15. Provisions estimées par les méthodes déterministes et Règlements réels

Année d'inventaire	Règlement réel	Provision par chain ladder	Provision par london Chain	Provision par de vyllder
2008	13601556	14 898 994	13 653 550	13 162 855
2009	17975701	14 601 015	12 905 313	12 810 828
2010	18433997	14 363 235	11 524 220	12 393 605
2011	15271404	13 742 653	10 831 989	11 629 303

Figure 22. Comparaison des Provisions Obtenues Par les Méthodes Déterministes sur le triangle de règlements de 1985 à 2007



Le modèle qui donne une provision qui semble proche des règlements réels est le modèle de **Chain Ladder** avec un boni obtenu en 2008 et une estimation de provision très proche en 2011. Ce qui confirme toute la difficulté de retenir un modèle adéquat pour nos données.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était de parler du Risque de modèles en provisionnement non-vie pour un contrat de responsabilité civile professionnelle médicale, nous pouvons constater tout d'abords que la notion de risque de modèle est une notion très complexe et pas très perceptible. Toutefois, nous avons commencé par présenter plusieurs méthodes de provisionnement (méthodes déterministes et méthodes stochastiques), toutes ces méthodes gravitant autour de la méthode de Chain Ladder.

Nous pouvons dire que le contrat de responsabilité civile qui est caractérisée par des développements très long, des paiements volatiles et une période d'incertitude grande, ne répond pas aux modèles classiques de provisionnement que nous connaissons : à savoir le modèle de Chain Ladder et ses différentes variantes.

Toutes ces méthodes ont présenté, des problèmes d'application (hypothèses non vérifiées, modèle non adapté aux données, faible convergence entre les évaluations faites sur les triangles de charges et les triangles de règlements cumulés,). Même si les valeurs obtenues sont proches de celles calculées par le portefeuille RCPM, il est difficile de statuer sur la qualité de ces approches. D'où la difficulté de retenir un modèle sur les années 2003 et 2007.

Néanmoins nous avons retenu le modèle GLM Log-normale en 2003 et avons essayé de quantifier l'erreur liée à ce choix. Et en 2007 nous avons penser retenir le modèle de Chain Ladder et l'évaluation de l'erreur liée à ce choix reste une de nos missions à venir.

Le choix d'un modèle pouvant engendrer la naissance du risque de modèle. notion que nous avons essayer d'introduire au travers la définition, ses différentes sources de provenance, les éléments qui permettent de le quantifier.

La suite de nos travaux pourrait permettre d'apporter d'autres méthodes de provisionnement sur cette branche, et d'implémenter d'avantage les éléments de quantification du risque de modèle que nous avons énoncé plus haut.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ouvrages

- Arthur Charpentier et Christophe Dutang. L'actuariat avec R (2012)
- NADIA HADJ-CHAIB Candeille, *Risques et assurances de responsabilité civile*, Editions L'ARGUS de l'assurance, 2012, 426 pages.
- LAMBERT-FAIVRE Yvonne, *Assurances des entreprises et des professions*, Précis Dalloz, 1979, 693 pages.
- NADIA HADJ-CHAIB Candeille, *Risques et assurances de responsabilité civile*, Editions L'ARGUS de l'assurance, 2012, 426 pages

Publications

- Code des assurances de la Zone CIMA
- Shaun Wang, Markus Stricker, Stephen J. Strommen. « Model Validation for Insurance Enterprise Risk and Capital Models. » 2014.
- Nicole Branger, Christian Schlag. *Model Risk : A Conceptual Framework for Risk Measurement and Hedging*. 2004.
- Pauline Barrieu, Giacomo Scandolo. *Assessing Financial Model Risk*. 2013.

Mémoires

- Éric Maniable, Provisionnement Responsabilité Civile Médicale (2013)
- LAGIER Raphaël, Provisionnement non-vie sur la branche Responsabilité Civile Professionnelle (2013)
- LALLEMENT Thomas, Le Risque de Modèle (2014)

ANNEXES

Code R Pour la Méthode de Chain Ladder

```
Provision_ChainLadder_Standard <- function (Xij) {
  Xij <- as.matrix(Xij)
  print("Triangle des paiements incrémentaux")
  print (Xij)
  Cij=t(apply(Xij,1,cumsum))
  print("Triangle des paiements cumulés")

  print (Cij)
  Nb <- nrow(Cij)
  fj = rep(NA,Nb-1)
  for(i in 1:(Nb-1)){
    fj[i] = sum(Cij[1:(Nb-i),i+1])/ sum(Cij[1:(Nb-i),i])
  }
  options(digits = 5)
  print("Facteurs de développement")
  print(fj)
  Triangle=Cij
  for(i in 1:(Nb-1)) {
    Triangle[(Nb-i+1):(Nb),i+1]=fj[i]*Triangle[(Nb-i+1):(Nb),i]
  }
  options(digits = 3)
  print ("Triangle completé")
  print(Triangle)
  Charge_ultime_Si = Triangle[,Nb]
  Charge_ultime_Si
  Paiements_Totaux_Ci_n_i = diag(Triangle[,Nb:1])
  Paiements_Totaux_Ci_n_i
  Ri = Charge_ultime_Si-Paiements_Totaux_Ci_n_i
  Ri <- data.frame(Ri)
  print ("Provisions par annee d'origine (Ri)")
  print(Ri)
  R=sum(Ri)
  print ("Provision globale (R)")
  print(R)
  print("Validation de l'hypothèse: CC-plot ")
  par(mfrow = c(2,3))
  for (j in 2:Nb) {
    plot(Triangle[1:Nb,j-1],Triangle[1:Nb,j],pch=19,cex=1.5,col="blue")
    pente <- lm(Triangle[,j]~0+Triangle[,j-1],weights=1/Triangle[,j-1])$coefficients # reg sans
    constante

    abline(a=0,b=pente,col="red")
  }
```


Thème : Risque de modèle dans le provisionnement d'un contrat responsabilité civile professionnelle.

```
options(digits = 5)
fij=Cij[,2:Nb]/Cij[,1:(Nb-1)]
print("Validation de l'hypothèse: D-triangle")
fij
}
```

NB : la méthode chain Ladder s'applique sans trop de perturbation aux triangles de liquidation à incréments négatifs. On peut le vérifier :

Provision_ChainLadder_Standard(xij_neg)

NB : Il est possible d'utiliser la fonction chainladder() de la librairie ChainLadder, applique aux triangles des **paiements cumulés**.

```
library(ChainLadder)
chainladder(cij)
```